

CAPÍTULO 12

DINÁMICA DE LA ROTACIÓN

En el capítulo 11 hemos considerado la cinemática de la rotación y señalábamos que no contenía nuevas características básicas distintivas, estando relacionados los parámetros ϕ , ω , y α de la rotación con los correspondientes parámetros x , v , y a de la traslación para las partículas que forman el sistema en rotación. En este capítulo, siguiendo el patrón de nuestro estudio del movimiento de traslación, consideramos las causas de la rotación, un tema que se conoce como dinámica de la rotación. Los sistemas en rotación están formados de partículas, y ya hemos aprendido cómo aplicar las leyes de la mecánica clásica al movimiento de las partículas. Por esta razón la dinámica de la rotación, como la cinemática, no debería contener características distintivas que sean fundamentalmente nuevas. Sin embargo, al igual que en capítulo 11, es muy útil volver a escribir los conceptos del movimiento de traslación en una forma nueva, especialmente elegida por su conveniencia para describir a los sistemas en rotación.

12-1 DINÁMICA DE LA ROTACIÓN: UNA VISIÓN GENERAL

En el capítulo 5 planteábamos el problema fundamental de la dinámica: cuando se aplican fuerzas externas a un cuerpo de masa m , ¿cuál es el movimiento resultante? Explicábamos entonces cómo puede hallarse la solución a este problema usando la segunda ley de Newton, que enunciábamos como sigue:

$$\text{fuerza} = \text{masa} \times \text{aceleración}.$$

En el presente capítulo buscamos una relación dinámica que nos permita analizar el problema similar en la dinámica de la rotación: cuando una fuerza se aplica en cierto punto a un cuerpo rígido que puede girar libremente alrededor de un eje determinado, ¿cuál es el movimiento resultante? El lugar donde se aplica la fuerza debe tener importancia, ya que de la experiencia sabemos que una fuerza dada aplicada a un cuerpo en un lugar puede producir una rotación diferente a la producida si la fuerza se aplica en otro lugar. La cantidad en la dinámica de la rotación que toma en cuenta tanto la magnitud de la fuerza como el lugar de aplicación de la fuerza y su

dirección se llama *torca*; nuestro concepto de torca puede ser comparado por analogía con el de torsión o torcedura, de la misma manera que consideramos a la fuerza como un empujón o jalón.

También sabemos por la experiencia que el esfuerzo necesario para poner a un cuerpo en rotación depende de cómo esté distribuida la masa del cuerpo; es más fácil para una fuerza dada hacer girar a un cuerpo cuya masa esté cercana al eje de rotación que a otro cuya masa esté alejada de este eje. La cantidad inercial que tiene en cuenta la distribución de la masa de un cuerpo se llama *inercia de la rotación*.* Al contrario de la masa, la inercia de la rotación no es una propiedad intrínseca de un cuerpo, sino que ésta depende del eje de rotación alrededor del cual el cuerpo gira.

Dadas las analogías entre las cantidades de la traslación (fuerza y masa) y las cantidades de la rotación (torca e inercia de la rotación), nos conduce a suponer un análogo para la rotación de la segunda ley de Newton en la forma

$$\text{torca} = \text{inercia de la rotación} \times \text{aceleración angular}.$$

* Conocida también como el *momento de inercia*.

Este es, de hecho, el resultado correcto, como lo demostraremos en la sección 12-5.

Al igual que la fuerza y la aceleración, la torca y la aceleración angular son cantidades vectoriales. Sin embargo, en este capítulo consideraremos únicamente casos en los que el eje de rotación pueda ser considerado como fijo en cuanto a dirección. Esta restricción es similar al hecho de considerar solamente el movimiento unidimensional en el caso de la dinámica de la traslación. Si bien la torca es una cantidad vectorial, como lo demostraremos en la sección 12-4, podemos usar la forma escalar de las ecuaciones dinámicas en las que todas las cantidades vectoriales se refieren a las componentes a lo largo del eje de rotación. (En el capítulo 13 discutiremos situaciones en las que debemos de considerar la naturaleza vectorial de las cantidades de la rotación.)

Existen dos enfoques que pueden adoptarse para derivar las ecuaciones de la dinámica de la rotación. En el primero, se considera a la fuerza que actúa sobre cada partícula del cuerpo, y las torcas que actúan sobre cada partícula se suman para hallar la torca total que actúa sobre el cuerpo. Para llevar a cabo este método debemos conocer cómo se transmiten las fuerzas externas desde sus puntos de aplicación a la ubicación de cada partícula.*

El segundo enfoque, que es el que aquí adoptamos, se basa en la conservación de la energía, en particular el teorema trabajo-energía que hemos estudiado en el capítulo 8,

$$W = \Delta K.$$

Para este cálculo en particular, W representa el trabajo neto efectuado sobre el objeto por las fuerzas externas que cambian el movimiento de rotación, y ΔK representa el cambio de la energía cinética de la rotación, la cual suponemos, en este caso, que es la única forma de energía que el cuerpo puede tener.

Comenzaremos, en las dos secciones siguientes, con una exposición de lo que es la energía cinética de rotación y la inercia de la rotación. La exposición, después, de la torca nos llevará a las ecuaciones de la dinámica de la rotación.

12-2 ENERGÍA CINÉTICA DE LA ROTACIÓN E INERCIA DE LA ROTACIÓN

La figura 1 muestra un cuerpo rígido que gira con respecto a un eje vertical fijo. Consideraremos al cuerpo como un

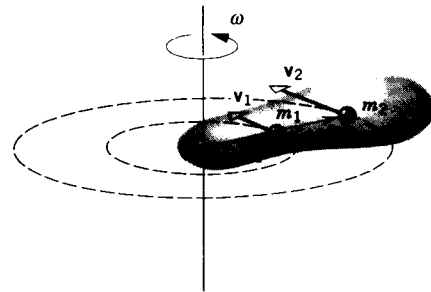


Figura 1 Un cuerpo rígido gira en torno a un eje fijo. Cada partícula del cuerpo tiene la misma velocidad angular ω , pero la velocidad tangencial v varía con la distancia r de la partícula al eje de rotación. Aquí m_1 y m_2 tienen la misma velocidad angular ω , pero $v_2 > v_1$ porque $r_2 > r_1$.

conjunto de partículas, y analizaremos la rotación de una partícula sola como lo hicimos en el capítulo 11. Una partícula de masa m a una distancia r del eje de rotación se mueve en un círculo de radio r a una velocidad angular ω con respecto a este eje y tiene una velocidad lineal tangencial $v = \omega r$. La energía cinética de la partícula es, por lo tanto, $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$.

La energía cinética total K del cuerpo que gira es la suma de las energías cinéticas de todas las partículas de que se compone el cuerpo, que puede expresarse así:

$$K = \frac{1}{2}m_1r_1^2\omega^2 + \frac{1}{2}m_2r_2^2\omega^2 + \dots = \frac{1}{2}\left(\sum m_ir_i^2\right)\omega^2. \quad (1)$$

Aquí hemos supuesto que el cuerpo es rígido, de modo que todas las partículas tienen la misma velocidad angular ω ; de aquí que el factor común ω^2 pueda ser eliminado de cada término en la suma de la ecuación 1. La cantidad $\sum m_ir_i^2$ es la suma de los productos de la masa de cada partícula por el cuadrado de su distancia perpendicular al eje de rotación. Se le llama *inercia de rotación* del cuerpo con respecto al eje de rotación particular, y se representa por el símbolo I .

$$I = \sum m_ir_i^2. \quad (2)$$

Nótese que la *inercia de rotación de un cuerpo depende del eje en torno al cual esté girando* así como de la manera en que esté distribuida su masa. La inercia de rotación tiene las dimensiones ML^2 y se expresa usualmente en $\text{kg} \cdot \text{m}^2$.

Al combinar las ecuaciones 1 y 2 podemos escribir la energía cinética del cuerpo rígido en rotación como

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2. \quad (3)$$

Esta es análoga a la expresión para la energía cinética de traslación de un cuerpo, $K = \frac{1}{2}Mv^2$. Ya hemos visto que la velocidad angular ω es análoga a la velocidad lineal v .

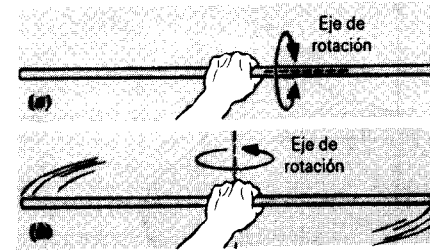


Figura 2 Para hacer girar un barrote largo en torno al eje que está a lo largo de su longitud, como en (a), se requiere menos esfuerzo que para hacerlo girar alrededor de un eje perpendicular a su longitud, como en (b). En (a), las partículas del barrote están más cerca del eje de rotación que en (b), y por lo tanto el barrote tiene una inercia de rotación más pequeña en (a).

Ahora veremos que la inercia de rotación I es análoga a la masa M (que podemos considerar como la inercia de traslación).

En la ecuación 3, como en todas las ecuaciones que mezclen cantidades angulares con cantidades no angulares, la variable angular (ω en este caso) debe expresarse en radianes.

La energía cinética de rotación dada por la ecuación 3 no es una nueva clase de energía; es, simplemente, la suma de las energías cinéticas de traslación ordinarias de todas las partículas del cuerpo. Aun cuando todo el cuerpo pudiera no estar en un movimiento de traslación, cada una de sus partículas tiene una velocidad tangencial, y por lo tanto, cada partícula tiene una energía cinética. La dirección instantánea de la velocidad de cada partícula cambia cuando el cuerpo gira, pero la energía cinética depende de v^2 y es un escalar, de modo que no tiene una dirección asociada con ella. Por lo tanto, es bastante propio sumar las energías cinéticas de todas las partículas del cuerpo que gira. La energía cinética de rotación $\frac{1}{2}I\omega^2$ es simplemente una manera conveniente de expresar la energía cinética total de todas las partículas del cuerpo rígido.

La figura 2 muestra una demostración simple que usted puede llevar a cabo para convencerse de que girar un cuerpo que tenga una inercia de rotación grande exige un mayor esfuerzo (aplicado en un punto determinado) que dar la misma rotación a un cuerpo de inercia de rotación pequeña. Para hacer girar al barrote en torno a un eje a lo largo de su longitud (Fig. 2a) se requiere poco esfuerzo, relativamente; con relación al eje largo, todas las partículas del barrote tienen valores de r pequeños, y la inercia de rotación es pequeña. Cuando tratamos de hacer el giro alrededor de un eje perpendicular al eje largo (Fig. 2b), esto no sucede así. La masa no ha cambiado, por supuesto, pero una mayor cantidad de masa se halla situada lejos de este eje; de la ecuación 2, la cual indica que la masa contribuye a I como el cuadrado de su distancia al eje, esta masa distante aporta una contribución mucho mayor a I que la masa que está cerca

del eje. Es fácil comprobar que girar el barrote en torno a este eje requiere un esfuerzo mayor.

Problema muestra 1 Tres partículas de masas m_1 (2.3 kg), m_2 (3.2 kg), y m_3 (1.5 kg) están en los vértices de un triángulo rectángulo de relación 3-4-5, como se muestra en la figura 3. (a) Halle la inercia de rotación en torno a los ejes perpendiculares al plano xy y que pasan a través de cada una de las tres partículas. (b) Halle la inercia de rotación en torno a un eje perpendicular al plano xy y que pasa por el centro de masa.

Solución (a) Consideremos primero el eje que pasa por m_1 . Para las masas puntuales, m_1 está sobre el eje, de modo que $r_1 = 0$ y m_1 no contribuye a la inercia de rotación. Las distancias desde este eje a m_2 y m_3 son $r_2 = 3.0$ m y $r_3 = 4.0$ m. La inercia de rotación en torno al eje que pasa por m_1 es, entonces,

$$I_1 = \sum m_ir_i^2 = (2.3 \text{ kg})(0 \text{ m})^2 + (3.2 \text{ kg})(3.0 \text{ m})^2 + (1.5 \text{ kg})(4.0 \text{ m})^2 = 52.8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

De manera similar, para el eje que pasa por m_2 , tenemos

$$I_2 = \sum m_ir_i^2 = (2.3 \text{ kg})(3.0 \text{ m})^2 + (3.2 \text{ kg})(0 \text{ m})^2 + (1.5 \text{ kg})(5.0 \text{ m})^2 = 58.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Para el eje que pasa por m_3 ,

$$I_3 = \sum m_ir_i^2 = (2.3 \text{ kg})(4.0 \text{ m})^2 + (3.2 \text{ kg})(5.0 \text{ m})^2 + (1.5 \text{ kg})(0 \text{ m})^2 = 116.8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

¿Alrededor de qué eje requieren las rotaciones el mayor esfuerzo? ¿El menor?

(b) Primero, debemos localizar el centro de masa:

$$x_{\text{cm}} = \frac{\sum m_ix_i}{\sum m_i} = \frac{(2.3 \text{ kg})(0 \text{ m}) + (3.2 \text{ kg})(0 \text{ m}) + (1.5 \text{ kg})(4.0 \text{ m})}{2.3 \text{ kg} + 3.2 \text{ kg} + 1.5 \text{ kg}} = 0.86 \text{ m},$$

$$y_{\text{cm}} = \frac{\sum m_iy_i}{\sum m_i} = \frac{(2.3 \text{ kg})(0 \text{ m}) + (3.2 \text{ kg})(3.0 \text{ m}) + (1.5 \text{ kg})(0 \text{ m})}{2.3 \text{ kg} + 3.2 \text{ kg} + 1.5 \text{ kg}} = 1.37 \text{ m}.$$

Las distancias elevadas al cuadrado desde el centro de masa a cada una de las partículas son

$$r_1^2 = x_{\text{cm}}^2 + y_{\text{cm}}^2 = (0.86 \text{ m})^2 + (1.37 \text{ m})^2 = 2.62 \text{ m}^2,$$

$$r_2^2 = x_{\text{cm}}^2 + (y_2 - y_{\text{cm}})^2 = (0.86 \text{ m})^2 + (3.0 \text{ m} - 1.37 \text{ m})^2 = 3.40 \text{ m}^2,$$

$$r_3^2 = (x_3 - x_{\text{cm}})^2 + y_{\text{cm}}^2 = (4.0 \text{ m} - 0.86 \text{ m})^2 + (1.37 \text{ m})^2 = 11.74 \text{ m}^2.$$

La inercia de rotación se deduce entonces directamente:

$$I_{\text{cm}} = \sum m_ir_i^2 = (2.3 \text{ kg})(2.62 \text{ m}^2) + (3.2 \text{ kg})(3.40 \text{ m}^2) + (1.5 \text{ kg})(11.74 \text{ m}^2) = 34.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

* Para una exposición crítica de este método, véase "Rotational Motion and the Law of the Lever", por Hans C. Ohanian, *American Journal of Physics*, febrero de 1991, pág. 182.

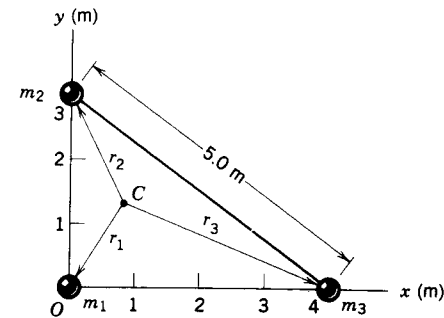


Figura 3 Problema muestra 1. El punto C marca el centro de masa del sistema que consta de las tres partículas.

Nótese que la inercia de rotación en torno al centro de masa es la más pequeña de las que hemos calculado. Este es un resultado general, el cual probaremos más adelante. Es más fácil hacer girar a un cuerpo alrededor de un eje que pase por el centro de masa que alrededor de cualquier otro eje paralelo.

El resultado del problema muestra anterior nos conduce a un resultado general importante, el *teorema de los ejes paralelos*:

La inercia de rotación de cualquier cuerpo en torno a un eje arbitrario es igual a la inercia de rotación alrededor de un eje paralelo que pase por el centro de masa más la masa total por la distancia entre los dos ejes elevada al cuadrado.

Matemáticamente, el teorema con ejes paralelos tiene la forma siguiente:

$$I = I_{cm} + Mh^2, \quad (4)$$

donde I es la inercia de rotación alrededor del eje arbitrario, I_{cm} es la inercia de rotación alrededor del eje paralelo que pasa por el centro de masa, M es la masa total del objeto, y h es la distancia perpendicular entre los ejes. Nótese que los dos ejes deben ser paralelos.

Antes de probar el teorema de los ejes paralelos, demos-tremos cómo podríamos haberlo usado para obtener los resultados del problema muestra previo. Comenzaremos con la inercia de rotación en torno al centro de masa, que hemos hallado en la parte (b): $I_{cm} = 34.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. La distancia h entre el eje que pasa por el centro de masa y el eje que pasa por m_1 es, precisamente, r_1 , la cual calculamos en la parte (b). Así,

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{cm} + Mh^2 \\ &= 34.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 + (2.3 \text{ kg} + 3.2 \text{ kg} + 1.5 \text{ kg})(2.62 \text{ m})^2 \\ &= 52.8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \end{aligned}$$

en concordancia con el resultado de la parte (a). Será conveniente que compruebe que I_2 e I_3 se verifican de la misma manera.

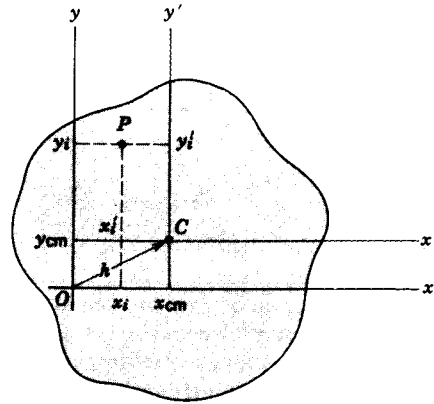


Figura 4 Una placa delgada en el plano xy va a girar en torno al eje z , que es perpendicular a la página en el origen O . El punto C marca el centro de masa de la placa. Una partícula P está situada en las coordenadas x_i, y_i respecto al origen O y en las coordenadas x_i', y_i' respecto al centro de masa C .

El teorema los ejes paralelos tiene un corolario importante: puesto que el término Mh^2 es siempre positivo, I_{cm} es siempre la inercia de rotación más pequeña de cualquier grupo de ejes paralelos. (Puede no ser la inercia de rotación más pequeña absoluta del objeto; un eje que apunte en una dirección diferente puede dar un valor más pequeño.) Así, para rotaciones en un plano dado y con una velocidad angular dada, la elección de un eje que pase por el centro de masa cuesta la menor cantidad de energía (porque $K = \frac{1}{2}I\omega^2$).

Demostración del teorema de los ejes paralelos

La figura 4 muestra una placa delgada en el plano xy , que puede considerarse como un conjunto de partículas. Deseamos calcular la inercia de rotación de este objeto alrededor del eje z , que pasa por el origen O en la figura 4, en ángulo recto con el plano de esa figura. Representamos a cada partícula de la placa por su masa m_i , sus coordenadas x_i y y_i con respecto al origen O , y sus coordenadas x_i' y y_i' con respecto al centro de masa C . La inercia de rotación alrededor de un eje que pase por O es

$$I = \sum m_i r_i^2 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2).$$

Con relación a O , el centro de masa tiene las coordenadas x_{cm} y y_{cm} , y de la geometría de la figura 4 podemos ver que las relaciones entre las coordenadas x_i, y_i y x_i', y_i' son $x_i = x_i' + x_{cm}$ y $y_i = y_i' + y_{cm}$. Sustituyendo estas transformaciones, tenemos que

$$\begin{aligned} I &= \sum m_i [(x_i' + x_{cm})^2 + (y_i' + y_{cm})^2] \\ &= \sum m_i (x_i'^2 + 2x_i'x_{cm} + x_{cm}^2 + y_i'^2 + 2y_i'y_{cm} + y_{cm}^2). \end{aligned}$$

Reagrupando los términos, podemos escribir esto así:

$$\begin{aligned} I &= \sum m_i (x_i'^2 + y_i'^2) + 2x_{cm} \sum m_i x_i' + 2y_{cm} \sum m_i y_i' \\ &\quad + (x_{cm}^2 + y_{cm}^2) \sum m_i. \end{aligned}$$

La primera suma de arriba es, precisamente, $I_{cm} = \sum m_i r_i'^2$. Los dos términos siguientes se parecen a las fórmulas usadas para calcular las coordenadas de un centro de masa (Ec. 11 del

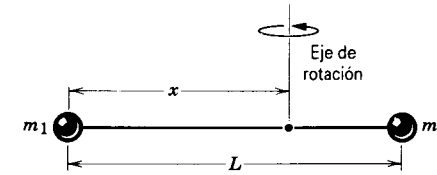


Figura 5 Problema muestra 2. Las dos partículas (el objeto) van a girar en torno a un eje perpendicular a la varilla que las une y a una distancia x de m_1 .

capítulo 9), pero (como lo muestra la Fig. 4) están calculados dentro del sistema del centro de masa. Por ejemplo, $\sum m_i x_i'^2 = Mx_{cm}'^2 = 0$ porque $x_{cm}' = 0$ y similarmente $\sum m_i y_i' = My_{cm}' = 0$: en el sistema de coordenadas del centro de masa, el centro de masa está, por definición, en el origen, por lo que estos términos se anulan. En el último término, h representa la distancia entre el origen O y el centro de masa C , de modo que $h^2 = x_{cm}^2 + y_{cm}^2$; también, $\sum m_i = M$, la masa total. Entonces,

$$I = I_{cm} + Mh^2,$$

lo cual demuestra el teorema de los ejes paralelos. ■

Problema muestra 2 El objeto mostrado en la figura 5 consta de dos partículas, de masas m_1 y m_2 , unidas por una varilla rígida de longitud L . (a) Despreciando la masa de la varilla, halle la inercia de rotación I de este sistema para las rotaciones de este objeto alrededor de un eje perpendicular a la varilla y a una distancia x de m_1 . (b) Demuestre que I es mínima cuando $x = x_{cm}$.

Solución (a) Según la ecuación 2, obtenemos

$$I = m_1 x^2 + m_2 (L - x)^2.$$

(b) Hallamos el valor mínimo de I haciendo que dI/dx sea igual a 0;

$$\frac{dI}{dx} = 2m_1 x + 2m_2 (L - x)(-1) = 0.$$

Resolviendo, hallamos el valor de x para el cual tenemos este mínimo:

$$x = \frac{m_2 L}{m_1 + m_2}.$$

Ésta es idéntica a la expresión para el centro de masa del objeto, y por lo tanto, la inercia de rotación alcanza su valor mínimo en $x = x_{cm}$. Esto es consistente con el teorema los ejes paralelos, el cual exige que I_{cm} sea la inercia de rotación más pequeña entre ejes paralelos.

Los puntos para los cuales la primera derivada de una función es igual a cero pueden no ser todos mínimos de la función. ¿Puede usted demostrar, mediante la segunda derivada, que hemos hallado realmente un mínimo de I ?

12-3 INERCIA DE ROTACIÓN DE LOS CUERPOS SÓLIDOS

Si consideramos a un cuerpo como hecho de un número de partículas discretas, podemos calcular su inercia de

rotación en torno a cualquier eje a partir de la ecuación 2, en la cual la suma se toma sobre todas las partículas. Sin embargo, si lo vemos como una distribución continua de materia, podemos imaginarlo dividido en un gran número de pequeños elementos de masa δm_i . Cada δm_i está ubicado a determinada distancia r_i perpendicular al eje de rotación. Considerando a cada δm_i aproximadamente como una masa puntual, podemos calcular la inercia de rotación de acuerdo con la ecuación 2:

Pronto consideraremos a ésta como el límite de δm_i , infinitesimalmente pequeño, de modo que la suma se convierta en una integral. Por ahora, ilustremos la transición al cálculo integral usando la ecuación 5 para aproximar la inercia de rotación de una barra uniforme sólida que gira en torno a un eje perpendicular a la barra en su punto medio. La figura 6a ilustra la situación. La barra tiene una longitud L y una masa M . Imaginemos que la barra está dividida en 10 trozos, cada uno de longitud $L/10$ y de masa $M/10$. Los trozos están numerados de $i = 1$ a $i = 10$, de modo que el i ésimo está a una distancia r_i del eje; para este cálculo, hacemos que r_i esté medido desde el eje al centro del trozo. Entonces, los trozos de cada extremo tienen $r_1 = r_{10} = 0.45L$; los trozos próximos a los extremos tienen $r_2 = r_9 = 0.35L$, y los trozos más cercanos al eje tienen $r_5 = r_6 = 0.05L$. Ahora llevamos a cabo la suma para los 10 trozos de acuerdo con la ecuación 5:

$$\begin{aligned} I &= r_1^2 \delta m_1 + r_2^2 \delta m_2 + \cdots + r_{10}^2 \delta m_{10} \\ &= (0.1M)(0.45L)^2 + (0.1M)(0.35L)^2 + (0.1M)(0.25L)^2 \\ &\quad + (0.1M)(0.15L)^2 + (0.1M)(0.05L)^2 + \cdots, \end{aligned}$$

donde en la segunda ecuación los cinco términos listados corresponden a la mitad de la barra, y $\cdots$ significa que tenemos cinco términos idénticos de la otra mitad. Evaluando los factores numéricos, obtenemos el resultado

$$I = 0.825ML^2 = \frac{1}{12.12}ML^2 \quad (10 \text{ trozos}).$$

Nuestro motivo para escribir el resultado de esta manera no tardará en ser evidente.

Supongamos ahora que dividimos la barra en 20 trozos, cada uno de ellos con una longitud de $L/20$ y masa $M/20$ (Fig. 6b). Repitiendo el cálculo anterior, obtenemos el resultado

$$I = 0.831ML^2 = \frac{1}{12.03}ML^2 \quad (20 \text{ trozos}).$$

A medida que aumentemos el número de trozos, ¿tiene el resultado a un valor límite que podamos ver como la inercia de rotación? En el problema 12, se le pidió a usted derivar el resultado para cualquier número N arbitrario de trozos:

$$I = \frac{1}{12}ML^2 \left(\frac{N^2 - 1}{N^2} \right) \quad (N \text{ trozos}). \quad (6)$$

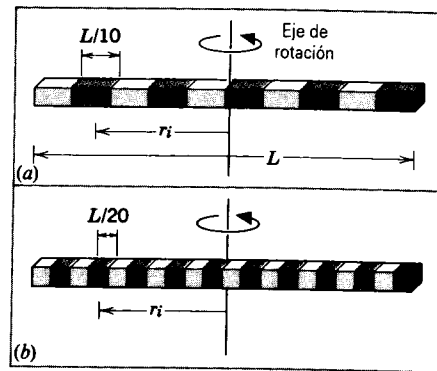


Figura 6 (a) La inercia de rotación de una barra sólida de longitud L , que gira en torno a un eje que pasa por su centro y es perpendicular a su longitud, puede calcularse aproximadamente dividiendo la barra en 10 trozos iguales, cada uno de longitud $L/10$. Cada trozo es tratado como una masa puntual a una distancia r_i del eje. (b) Se obtiene una aproximación más precisa a la inercia de rotación de la barra dividiéndola en 20 trozos.

Claramente, esto tiende al límite de $ML^2/12$ cuando $N \rightarrow \infty$, y podemos señalarlo como el valor de la inercia de rotación de la barra. Nótese que los coeficientes numéricos para $N = 10$ ($\frac{1}{12.12}$) y $N = 20$ ($\frac{1}{12.03}$) demuestran la tendencia al límite ($\frac{1}{12}$) si $N \rightarrow \infty$.

El método algebraico anterior opera fácilmente en unos cuantos casos, y ayuda a formarnos una imagen de cómo el cálculo integral divide a un objeto sólido en trozos infinitesimales y suma a todos los trozos. En los cálculos que intervienen para la mayoría de los sólidos, el método algebraico es engorroso, siendo mucho más fácil usar las técnicas de cálculo directamente. Consideremos al límite de la ecuación 5 cuando el número de trozos es demasiado grande o, equivalentemente, cuando sus masas δm se vuelven muy pequeñas:

$$I = \lim_{\delta m \rightarrow 0} \sum r_i^2 \delta m_i,$$

y, de la manera usual, la suma resulta ser una integral en el límite:

$$I = \int r^2 dm. \quad (7)$$

La integración se lleva a cabo sobre todo el volumen del objeto, pero a menudo ciertas simplificaciones geométricas pueden reducir la integral a términos más manejables.

Como ejemplo, regresemos a la barra que giraba en torno a un eje que pasa por su centro. La figura 7 muestra el problema trazado para el enfoque integral. Elegimos a un elemento *arbitrario* de masa dm situado a una distancia x del eje. (Usamos a x como la variable de la integración.) La masa de este elemento es igual a su densidad ρ (masa por unidad de volumen) o por el ele-

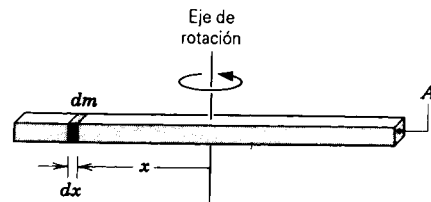


Figura 7 La inercia de rotación de una barra sólida se calcula integrando a lo largo de su longitud. Un elemento de masa dm está ubicado a una distancia x perpendicular al eje de rotación.

mento de volumen dV . El elemento de volumen es igual al área multiplicada por su espesor dx :

$$dV = A dx$$

$$dm = \rho dV = \rho A dx.$$

Suponemos que la barra tiene una sección transversal uniforme de área A y una densidad ρ uniforme, siendo ésta igual a la masa total M dividida entre el volumen total AL : $\rho = M/V = M/AL$. Evaluando la ecuación 7, obtenemos

$$I = \int r^2 dm = \int x^2 \frac{M}{AL} A dx = \frac{M}{L} \int x^2 dx.$$

Con $x = 0$ en el punto medio de la barra, los límites de la integración van desde $x = -L/2$ hasta $x = +L/2$. La inercia de rotación es, entonces,

$$I = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} x^2 dx = \frac{M}{L} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-L/2}^{+L/2} = \frac{1}{12} ML^2. \quad (8)$$

Este resultado es idéntico al deducido del método algebraico, ecuación 6, en el límite $N \rightarrow \infty$.

Si deseamos girar a la barra en torno a un eje que pase por un extremo perpendicular a su longitud, podemos usar el teorema de los ejes paralelos (Ec. 4). Ya hemos hallado a I_{cm} , y la distancia h entre los ejes paralelos es precisamente la mitad de la longitud, de modo que

$$I = \frac{1}{12} ML^2 + M(L/2)^2 = \frac{1}{3} ML^2.$$

A menudo podemos calcular la inercia de rotación de un cuerpo sólido descomponiéndolo en elementos de inercia de rotación conocida. Por ejemplo, supongamos que tenemos una placa rectangular sólida y uniforme de longitud a y de anchura b , como se muestra en la figura 8. Deseamos calcular la inercia de rotación en torno a un eje perpendicular a la placa y que pase por su centro.

La placa puede ser dividida en una serie de fajas, cada una de las cuales va a ser considerada como una barra. Consideremos la faja de masa dm , longitud a , y anchura dx mostrada en la figura 8. La masa dm de la faja se relaciona con la masa

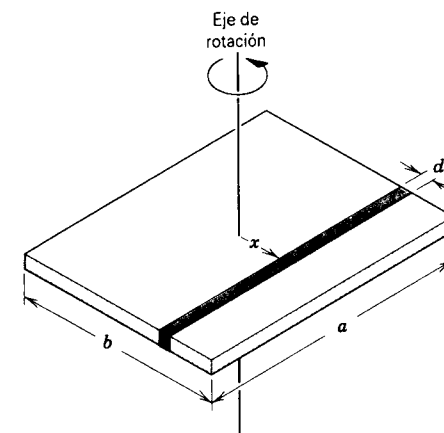


Figura 8 Una placa rectangular sólida de lados a y b se hace girar en torno a un eje que pasa por su centro y es perpendicular a su superficie. Para calcular la inercia de rotación, consideramos que la placa está dividida en fajas. La faja sombreada puede ser considerada como una barra, cuya inercia de rotación en torno al eje central puede hallarse usando el teorema de los ejes paralelos.

total M como el área de la superficie de la faja ($a dx$) se relaciona con el área ab de toda la superficie:

$$\frac{dm}{M} = \frac{a dx}{ab} = \frac{dx}{b}$$

$$dm = \frac{M}{b} dx.$$

La inercia de rotación dI de la faja en torno al eje se relaciona, según el teorema de los ejes paralelos, con la inercia de rotación de la faja (vista como una barra) en torno a su centro de masa, dado por la ecuación 8 como $dI_{cm} = \frac{1}{12} dm a^2$;

$$dI = dI_{cm} + dm h^2 = \frac{1}{12} dm a^2 + dm x^2.$$

Sustituyendo a dm nos da

$$dI = \frac{Ma^2}{12b} dx + \frac{M}{b} x^2 dx,$$

e I se deduce de la integral

$$I = \int dI = \frac{Ma^2}{12b} \int dx + \frac{M}{b} \int x^2 dx.$$

Los límites de la integración sobre x van desde $-b/2$ hasta $+b/2$. Llevando a cabo las integraciones, obtenemos

$$I = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2). \quad (9)$$

Nótese que este resultado es independiente del espesor de la placa: obtendríamos el mismo resultado para un montón de placas de masa total M o, de manera equivalente,

para un bloque rectangular sólido de las mismas dimensiones superficiales. Nótese también que nuestro resultado depende de la diagonal de la placa más bien que de a y b por separado. ¿Puede usted explicar esto?

Operando de este modo, podemos evaluar la inercia de rotación de casi cualquier objeto sólido regular. La figura 9 muestra algunos objetos comunes y sus inercias de rotación. Aunque es relativamente sencillo usar integrales bidimensionales o tridimensionales para calcular estas inercias de rotación, a menudo es posible, como lo hicimos en el cálculo anterior, descomponer a un sólido complejo en sólidos más sencillos de inercias de rotación conocidas. El problema 14 al final del capítulo describe un cálculo al respecto para una esfera sólida.

12-4 TORCA QUE ACTÚA SOBRE UNA PARTÍCULA

La experiencia con una puerta pesada nos enseña que una fuerza dada puede producir varias aceleraciones angulares dependiendo de dónde se aplique la fuerza a la puerta y de cómo aquella esté dirigida (véase la Fig. 10). Una fuerza (tal como F_1) aplicada al borde y dirigida a lo largo de la puerta no puede producir una aceleración angular, como tampoco lo puede hacer una fuerza (tal como F_2) aplicada a lo largo del gozne de la puerta; pero una fuerza (tal como F_3) aplicada en ángulo recto con la puerta en su borde exterior produce la mayor aceleración angular.

El análogo de la rotación de la fuerza se llama *torca*. Lo definiremos ahora para el caso especial de una partícula aislada observada desde un marco de referencia inercial. Más adelante extenderemos el concepto de torca a sistemas de partículas (incluyendo a cuerpos rígidos) y demostraremos que la torca está íntimamente asociada a la aceleración angular.

Sea F una fuerza que actúa sobre una partícula aislada en un punto P cuya posición en torno al origen O del marco de referencia inercial está dado por el vector r (Fig. 11). Puesto que dos vectores determinan un plano, hemos elegido el plano xy para que contenga a los vectores r y F . La torca τ que actúa sobre la partícula *con respecto al origen* O se define en términos del producto vectorial (producto cruz) de r y F así:

$$\tau = r \times F. \quad (10)$$

La torca es una cantidad vectorial. Su magnitud está dada por

$$\tau = rF \sin \theta, \quad (11)$$

donde θ es el ángulo entre r y F ; su dirección es normal al plano formado por r y F (esto es, paralela al eje z

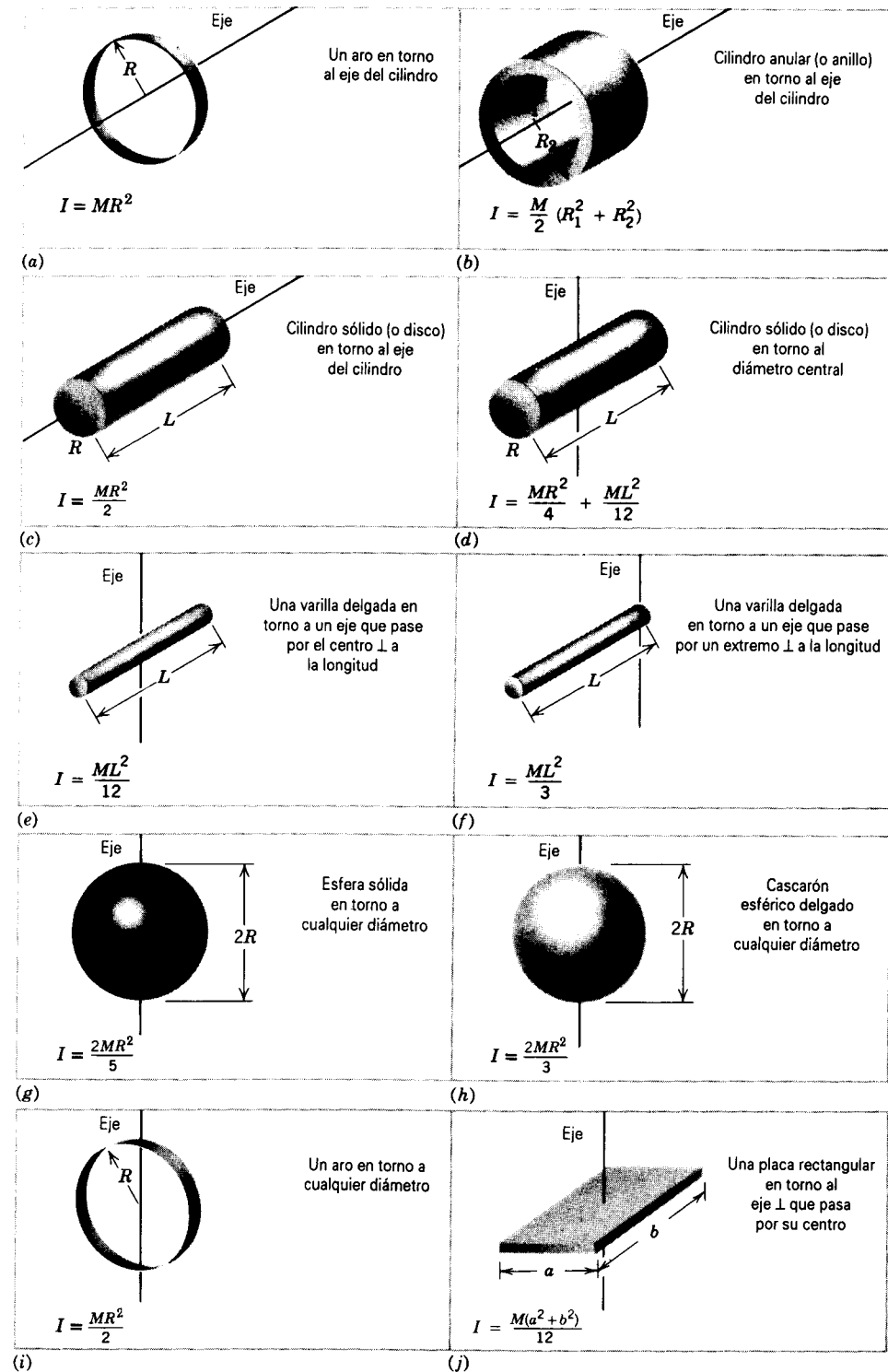


Figura 9 La inercia de rotación de varios sólidos en torno a ejes elegidos.

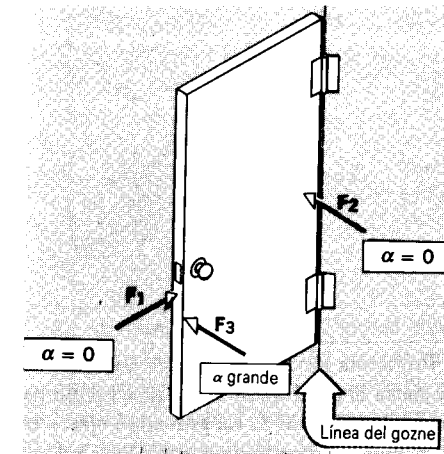


Figura 10 Al aplicar una fuerza $\mathbf{F}$ dada a una puerta se produce una aceleración angular α que varía con el punto en el que $\mathbf{F}$ se aplique y con su dirección respecto a la línea del gozne. La fuerza $\mathbf{F}_1$ está aplicada a lo largo de una línea que pasaría por la línea del gozne, y no produce ninguna aceleración angular (la puerta no se mueve). La fuerza $\mathbf{F}_2$ se halla aplicada a la línea del gozne; tampoco produce ninguna aceleración angular. La fuerza $\mathbf{F}_3$ se halla aplicada a un punto alejado de la línea del gozne y en una dirección perpendicular a la línea que une al punto de aplicación de $\mathbf{F}_3$ con la línea del gozne; esta fuerza produce la mayor aceleración angular posible.

to cruz τ sea *paralelo* al eje z , no necesariamente *a lo largo* del eje z . Podríamos situar al vector τ en cualquier punto en la coordenada del espacio de la figura 11 sin cambiar la validez de la ecuación 10, siempre y cuando τ permanezca paralelo al eje z .

La torca tiene las dimensiones de fuerza multiplicada por distancia; en términos de nuestras dimensiones fundamentales M , L , y T , tiene las dimensiones ML^2T^{-2} . Estas son las mismas que las dimensiones del trabajo. Sin embargo, la torca y el trabajo son cantidades físicas muy diferentes. Por ejemplo, la torca es un vector, y el trabajo es un escalar. La unidad para la torca puede ser el newton-metro ($N \cdot m$) o la libra-pie ($lb \cdot ft$), entre otras posibilidades. (Aunque $1 N \cdot m = 1 J$, no expresamos la torca en unidades de J .)

Nótese de la ecuación 10 que la torca producida por una fuerza depende no solamente de la magnitud y de la dirección de esta fuerza sino también del punto de aplicación de la fuerza respecto al origen, esto es, del vector $\mathbf{r}$. En particular, cuando la partícula P de la figura 11 está en el origen, $\mathbf{r}$ es cero y la torca τ con respecto al origen es cero. La torca con respecto a un punto O' a medio camino entre O y P es un vector (que puede ser trazado en O') paralelo al vector τ mostrado en la figura 11 pero a la mitad de su longitud.

Podemos también escribir la magnitud de τ (Ec. 11) ya sea como

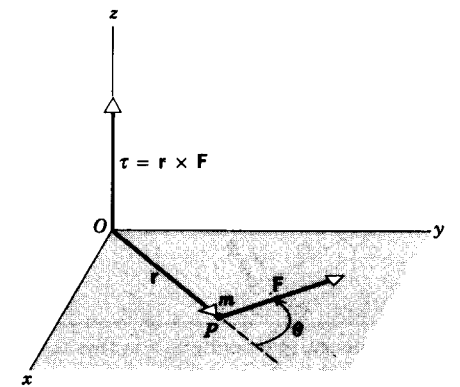


Figura 11 Una fuerza $\mathbf{F}$ actúa sobre una partícula de masa m situada en la posición $\mathbf{r}$ en el plano xy . Esta fuerza ejerce una torca $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ sobre la partícula con respecto al origen O . El vector torca apunta en la dirección de z creciente; podría estar trazado en cualquier lugar que escojamos, siempre y cuando sea paralelo al eje z .

$$\tau = (r \sin \theta)F = Fr_{\perp}, \quad (12a)$$

o como

$$\tau = r(F \sin \theta) = rF_{\perp}, \quad (12b)$$

donde, como lo muestra la figura 12, $r_{\perp} (= r \sin \theta)$ es la componente de $\mathbf{r}$ en ángulo recto con la línea a lo largo de la cual actúa $\mathbf{F}$ (llamada la *línea de acción* de $\mathbf{F}$), y $F_{\perp} (= F \sin \theta)$ es la componente de $\mathbf{F}$ en ángulo recto con $\mathbf{r}$. La torca se llama a menudo *momento de la fuerza*, y $r_{\perp}$ en la ecuación 12a se denomina el *brazo del momento*. La ecuación 12b muestra que sólo la componente de $\mathbf{F}$ perpendicular a $\mathbf{r}$ contribuye a la torca. En particular, cuando θ es igual a 0° o a 180° , no existe una componente perpendicular ($F_{\perp} = F \sin \theta = 0$); la línea de acción de la fuerza pasa a través del origen, y el brazo del momento $r_{\perp}$ con respecto al origen es también cero. En este caso, tanto la ecuación 12a como la ecuación 12b muestra que la torca τ es cero.

Problema muestra 3 Un péndulo consta de un cuerpo de masa $m = 0.17 \text{ kg}$ en el extremo de una varilla rígida de longitud $L = 1.25 \text{ m}$ y masa despreciable (Fig. 13). (a) ¿Cuál es la magnitud de la torca debida a la gravedad en torno al punto de pivoteo O en el instante en que el péndulo se desplaza como se muestra a través de un ángulo de $\theta = 10^\circ$ de la vertical? (b) ¿Cuál es la dirección de la torca en torno a O en ese instante? ¿Depende su dirección de que el péndulo se desplace hacia la izquierda o hacia la derecha de la vertical?

Solución (a) Podemos usar la ecuación 11 directamente para hallar la magnitud de la torca, siendo $r = L$ y $F = mg$:

$$\tau = Lmg \sin \theta = (1.25 \text{ m})(0.17 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(\sin 10^\circ) = 0.36 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

cuando $\mathbf{r}$ y $\mathbf{F}$ están en el plano xy), dada por la regla de la mano derecha para el producto vectorial de dos vectores: si usted hace girar a $\mathbf{r}$ sobre $\mathbf{F}$ (cuando están trazados cola con cola) a través del ángulo más pequeño entre ellos con los dedos de su mano derecha doblados, entonces la dirección del pulgar extendido da la dirección de τ . (Sin

duda querrá usted revisar la definición del producto vectorial (producto cruz) en la sección 3-5.)

Hemos trazado el vector torca en la figura 11 de modo que pase a través del origen, pero no es necesario hacerlo. Si $\mathbf{r}$ y $\mathbf{F}$ están en el plano xy , como hemos supuesto, entonces la ecuación 10 requiere solamente que el produc-

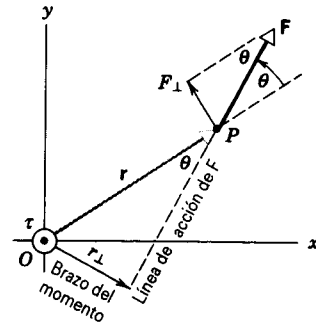


Figura 12 El plano xy , que contiene a la fuerza $\mathbf{F}$ y al vector de posición $\mathbf{r}$ de la figura 11. La magnitud de τ está dada por $F r_{\perp}$ (Ec. 12a) o por $r F_{\perp}$ (Ec. 12b). La dirección de τ (hacia afuera de la página) se indica en la figura por el signo $\odot$ (que sugiere la punta de una flecha).

(b) Con el desplazamiento como se muestra en la figura 13, la torca alrededor del punto de pivoteo está en el plano del papel. Conviene estar convencido aquí de que, si el péndulo se desplaza hacia el lado opuesto de la vertical, la torca tiene la dirección opuesta. Como lo veremos en la próxima sección, el efecto de una torca es producir una aceleración angular paralela. En el primer caso, la aceleración angular hacia el papel tiende a mover al péndulo hacia su posición de equilibrio. Cuando el péndulo se desplaza hacia el lado opuesto de la vertical, la torca hacia afuera del papel tiende otra vez a restituir al péndulo en su posición de equilibrio. Compruebe estas conclusiones usando la regla de la mano derecha para relacionar el sentido de la rotación en la dirección del vector de la aceleración angular (supuesto como paralelo a la torca).

12-5 DINÁMICA DE LA ROTACIÓN DE UN CUERPO RÍGIDO

En el movimiento de traslación, las técnicas que implican trabajo y energía nos ofrecen una forma diferente y a veces más ilustrativa de enfocar los problemas. En esta sección consideraremos el uso del trabajo y la energía en el movimiento de rotación.

Supongamos que un cuerpo rígido arbitrario pivotea alrededor del eje z . Se aplica al cuerpo una fuerza externa $\mathbf{F}$ que actúe en una dirección arbitraria en algún punto P del plano xy . La figura 14 muestra a la fuerza $\mathbf{F}$ y al punto P , omitiéndose el resto del cuerpo para mayor claridad. Consideraremos el trabajo dW efectuado por esta fuerza cuando el cuerpo gira en un ángulo $d\phi$.

El punto P , que está a una distancia r del eje de rotación, se mueve a lo largo de la distancia $ds = r d\phi$ cuando el cuerpo gira en el ángulo $d\phi$. El trabajo dW puede, entonces, expresarse así:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \quad (13)$$

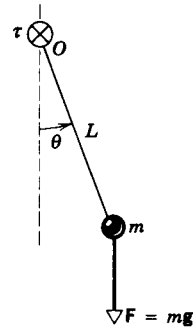


Figura 13 Problema muestra 3. Un péndulo, que consta de un cuerpo de masa m en el extremo de una varilla rígida carente de masa de longitud L . La gravedad ejerce una torca sobre la página en O , indicado aquí por el símbolo $\otimes$ (que sugiere la cola de una flecha).

donde ds es un vector de magnitud ds en la dirección del movimiento de P .

La componente z de $\mathbf{F}$ no contribuye al producto punto en la ecuación 13, porque ds no tiene una componente z . (Recuérdese de la ecuación 15 del capítulo 3 que el producto punto de $\mathbf{F}$ y $d\mathbf{s}$ puede ser escrito $F_x dx + F_y dy + F_z dz$. En nuestro caso, $dz = 0$, de modo que el producto punto no depende de la componente F_z). En los casos en que la dirección del eje de rotación sea fijo, necesitamos considerar solamente las componentes de la fuerza que están en el plano perpendicular al eje.

La figura 15 muestra el movimiento del punto P durante un intervalo de tiempo infinitesimal dt . Sobre el cuerpo actúa una fuerza externa, que ahora se supone está enteramente en el plano xy , en el punto P . El trabajo dW efectuado por esta fuerza durante esta rotación infinitesimal es

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F \cos \theta ds = (F \cos \theta)(r d\phi).$$

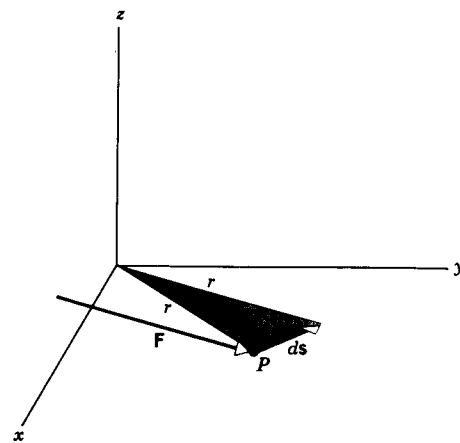


Figura 14 Una fuerza externa $\mathbf{F}$ actúa en el punto P de un cuerpo rígido (no mostrado) obligado a girar en torno al eje z . El cuerpo gira en un ángulo $d\phi$.

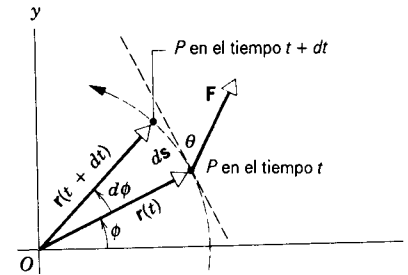


Figura 15 En un tiempo dt , el punto P de un cuerpo rígido se mueve una distancia ds a lo largo del arco de un círculo de radio r . El cuerpo rígido (que no aparece en la figura) y el vector $\mathbf{r}$ que localiza al punto P en el cuerpo giran cada uno en un ángulo $d\phi$ durante este intervalo.

El término $F \cos \theta$ es la componente de $\mathbf{F}$ en la dirección de ds ; es, por lo tanto, perpendicular a $\mathbf{r}$ y puede ser representada como $F_{\perp}$. De acuerdo con la ecuación 12b, $F_{\perp} r$ es la magnitud de la torca instantánea ejercida por $\mathbf{F}$ sobre el cuerpo rígido alrededor del eje perpendicular a la página que pasa por O , de modo que la ecuación anterior se convierte en

$$dW = F_{\perp} r d\phi = \tau d\phi. \quad (14)$$

Esta expresión para el trabajo efectuado en la rotación (en torno a un eje fijo) es equivalente a la expresión $dW = F dx$ para el trabajo efectuado en la traslación (a lo largo de una línea recta).

Supongamos ahora que varias fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots$, se aplican a diferentes puntos del cuerpo en el plano normal a su eje de rotación (el plano xy de la Fig. 15). El trabajo neto efectuado por estas fuerzas sobre el cuerpo en una rotación $d\phi$ es

$$dW_{\text{neto}} = (F_1 \cos \theta_1) r_1 d\phi + (F_2 \cos \theta_2) r_2 d\phi + \dots = (\tau_1 + \tau_2 + \dots) d\phi,$$

donde $(F_i \cos \theta_i) r_i$ da la componente de la torca τ_i con respecto a O . Nótese que, como debe suceder para un cuerpo rígido en rotación pura, suponemos que $d\phi$ es el desplazamiento angular de cualquier punto del cuerpo durante el intervalo de tiempo dt , sin importar dónde esté situado el punto en el cuerpo. Podemos escribir esto así:

$$dW_{\text{neto}} = \left(\sum \tau_{\text{ext}} \right) d\phi = \left(\sum \tau_{\text{ext}} \right) \omega dt, \quad (15)$$

donde en el último resultado hemos usado $d\phi = \omega dt$ de la ecuación 3 del capítulo 11. Aquí $\sum \tau_{\text{ext}}$ representa la torca externa total que actúa sobre el cuerpo, la cual se calcula considerando a cada torca externa como positiva en caso de que, al actuar aisladamente, tienda a girar al cuerpo en sentido contrario a las manecillas del reloj (aumentando

ϕ , por lo tanto) y como negativa si tiende a girar al cuerpo en el sentido de las manecillas.

Durante el intervalo de tiempo dt , la energía cinética del cuerpo cambia en una cantidad dK como resultado de la acción de las fuerzas externas. Suponemos que la energía cinética de rotación es la única forma de energía que el cuerpo puede contener. Usando la ecuación 3, $K = \frac{1}{2} I \omega^2$, hallamos que

$$dK = d\left(\frac{1}{2} I \omega^2\right) = I \omega d\omega = I \omega \alpha dt, \quad (16)$$

usando $d\omega = \alpha dt$ de la ecuación 5 del capítulo 11.

Durante el intervalo dt , el teorema trabajo energía da

$$dW = dK, \quad (17)$$

y sustituyendo en las ecuaciones 15 y 16 nos da

$$\left(\sum \tau_{\text{ext}} \right) \omega dt = I \omega \alpha dt,$$

o, cancelando los factores comunes de ωdt ,

$$\sum \tau_{\text{ext}} = I \alpha. \quad (18)$$

La ecuación 18 es el análogo de la rotación de la segunda ley de Newton en la forma escalar de $\sum F_{\text{ext}} = ma$, correspondiente al movimiento en una dimensión. En el caso de la rotación, es preciso advertir, una vez más, que nos ocupamos solamente de la rotación alrededor de un eje fijo. Es más, obsérvese que una torca positiva tiende a producir una aceleración angular positiva; esto es, la misma regla de la mano derecha usada para obtener el signo de α puede utilizarse para determinar el signo de τ . Como hicimos en el caso de la dinámica de la traslación, abandonamos el subíndice "ext" de τ para mayor conveniencia.

Para obtener la razón a la cual se efectúa el trabajo en el movimiento de rotación (alrededor de un eje fijo), dividimos la ecuación 14 entre el intervalo de tiempo infinitesimal dt durante el cual se desplaza el cuerpo por $d\phi$ y obtenemos

$$P = \tau \omega, \quad (19)$$

que da la potencia mecánica instantánea P . La ecuación 19 es el análogo de rotación de $P = Fv$ para el movimiento de traslación.

La analogía entre el movimiento de traslación en una dirección fija y el movimiento de rotación en torno a un eje fijo queda puesto de relieve en la tabla 1, la cual compara las ecuaciones correspondientes en los dos casos. La rotación de un cuerpo rígido en torno a un eje fijo no es la clase de movimiento de rotación más general; a menudo el eje no está fijo en un marco de referencia inercial. En el capítulo 13 consideraremos este caso más general, junto con el ímpetu angular que aparece listado en la última línea de la tabla 1 de ese mismo capítulo.

TABLA 1 COMPARACIÓN DE LAS ECUACIONES DE LA DINÁMICA LINEAL Y DE ROTACIÓN

Movimiento lineal		Rotación en torno a un eje fijo	
Desplazamiento	x	Desplazamiento angular	ϕ
Velocidad	$v = dx/dt$	Velocidad angular	$\omega = d\phi/dt$
Aceleración	$a = dv/dt$	Aceleración angular	$\alpha = d\omega/dt$
Masa (inercia de traslación)	M	Inercia de rotación	I
Fuerza	$F = Ma$	Torca	$\tau = I\alpha$
Trabajo	$W = \int F dx$	Trabajo	$W = \int \tau d\phi$
Energía cinética	$K = \frac{1}{2}Mv^2$	Energía cinética	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$
Potencia	$P = Fv$	Potencia	$P = \tau\omega$
Ímpetu lineal	$p = Mv$	Ímpetu angular†	$L = I\omega$

† El ímpetu angular se discute en el capítulo 13.

Dada la relación dinámica entre la torca y la aceleración angular, podemos ahora reconsiderar el efecto de una torca arbitraria sobre un cuerpo rígido obligado a girar en torno al eje z . Permitamos una vez más que la fuerza tenga una dirección arbitraria, como se muestra en la figura 16. La torca debida a esa fuerza, dada por $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, está en una dirección perpendicular al plano formado por $\mathbf{r}$ y $\mathbf{F}$. Podemos resolver a τ en sus componentes x , y , y z , como se muestra en la figura 16. Cada componente de la torca tiende a producir una rotación en torno a su eje correspondiente. Sin embargo, hemos supuesto que el cuerpo está fijo de modo tal que sólo sea posible la rotación en torno al eje z . Las componentes x y y de la torca no producen un movimiento. En este caso, las chumaceras sirven para

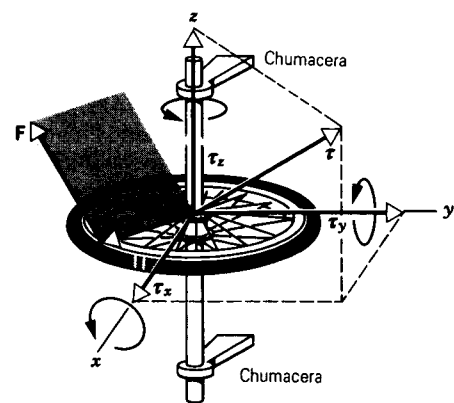


Figura 16 Un cuerpo rígido, en este caso una rueda, está libre para girar en torno al eje z . Una fuerza arbitraria $\mathbf{F}$, que actúa en un punto de la llanta, puede producir componentes de la torca a lo largo de los tres ejes de coordenadas. Solamente la componente z puede hacer girar a la rueda. Las componentes x y y de la torca tenderían a desviar al eje de rotación alejándolo del eje z . A esta tendencia deben oponerse torcas iguales y opuestas (no mostradas) ejercidas por las chumaceras, que mantienen al eje en una dirección fija.

obligar al sistema a girar en torno al eje z únicamente, y por lo tanto deben procurarse torcas que cancelen a las componentes x y y de la torca de la fuerza aplicada. Esto indica lo que se entiende por un cuerpo que está obligado a moverse en torno a un eje fijo: únicamente las componentes de la torca paralelas a ese eje son eficaces para hacer girar al cuerpo y se supone que las componentes de la torca perpendiculares al eje están balanceadas por otras partes del sistema. Las chumaceras *deben* ejercer torcas con componentes x y y que mantengan fija la dirección del eje de rotación; las chumaceras *pueden* también proporcionar una torca en la dirección z , como en el caso de chumaceras no ideales que ejerzan fuerzas de fricción sobre el eje de la rueda.

Problema muestra 4 En un parque de diversiones el papá de un niño empuja un tiiovivo, ejerciendo una fuerza $\mathbf{F}$ de 115 N de magnitud en un punto P de la periferia situado a una distancia de $r = 1.75$ m del eje de rotación (Fig. 17). La fuerza se ejerce en una dirección que forma un ángulo de 32° debajo de la horizontal, y la componente horizontal de la fuerza está en una dirección de 15° hacia adentro de la tangente en P . Halle la magnitud de la componente de la torca que acelera al tiiovivo.

Solución Solamente la componente horizontal de $\mathbf{F}$ produce una torca vertical. Hallemos a $F_\perp$, la componente de $\mathbf{F}$ a lo largo de la línea horizontal, perpendicular a $\mathbf{r}$. La componente horizontal de $\mathbf{F}$ es

$$F_h = F \cos 32^\circ = 97.5 \text{ N.}$$

La componente de F_h perpendicular a $\mathbf{r}$ es

$$F_\perp = F_h \cos 15^\circ = 94.2 \text{ N.}$$

La torca (vertical) a lo largo del eje de rotación es, entonces,

$$\tau = rF_\perp = (1.75 \text{ m})(94.2 \text{ N}) = 165 \text{ N} \cdot \text{m.}$$

La componente de F_h paralela a $\mathbf{r}$ ($= F_h \sin 15^\circ$) no produce torca alguna en torno al eje de rotación, y la componente vertical de F ($= F \sin 32^\circ$) produce una torca perpendicular al eje que

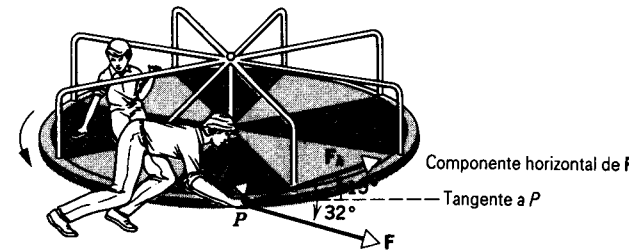


Figura 17 Problema muestra 4. El padre de un niño empuja al tiiovivo en un parque de atracciones. El papá está inclinado hacia abajo, de modo que la fuerza tiene una componente hacia abajo. Además, como él está fuera del borde, la fuerza se dirige ligeramente hacia adentro. La componente horizontal de la fuerza, F_h , está en el plano de la plataforma giratoria y forma un ángulo de 15° con la tangente en P , el punto en que se aplica la fuerza.

tendería a ladear la plataforma giratoria afuera del plano horizontal (porque el padre está empujando *hacia abajo* sobre la plataforma) si a esa torca no se le opusiera una torca igual y contraria desde las chumaceras.

El padre debe ejercer una torca que exceda a cualquier torca por fricción proveniente de las chumaceras. Cuando el padre deja de empujar, esta torca por fricción, que ahora actúa sola, hace más lento el giro del tiiovivo hasta que consigue frenarlo y llevarlo al reposo.

Problema muestra 5 La figura 18a muestra un disco uniforme de masa $M = 2.5$ kg y radio $R = 20$ cm montado en un eje horizontal fijo (sin fricción). Un bloque de masa $m = 1.2$ kg cuelga de un cordón que pasa alrededor del borde del disco. Halle la aceleración del bloque al caer, la tensión en el cordón, y la aceleración angular del disco.

Solución La figura 18b muestra un diagrama de cuerpo libre para el bloque. El bloque acelera hacia abajo de modo que su peso mg debe exceder la tensión T del cordón. Tomamos como positiva a la dirección hacia abajo y, de la segunda ley de Newton, tenemos

$$\sum F = mg - T = ma.$$

La figura 18c muestra un diagrama parcial del cuerpo libre para el disco. La única torca τ que actúa sobre el disco, tomada con respecto a su eje de rotación, es TR , y la inercia de rotación del disco es $\frac{1}{2}MR^2$. (Sobre el disco actúan también otras dos fuerzas, su peso y la fuerza hacia arriba que el soporte ejerce sobre el disco. Sin embargo, ambas fuerzas actúan en el eje del disco, de modo que no ejercen torca alguna sobre él.) Aplicando la segunda ley de Newton en la forma angular (Ec. 18), y haciendo que tanto τ como α sean positivas para una rotación en sentido contrario a las manecillas del reloj, obtenemos

$$\sum \tau = TR = \frac{1}{2}MR^2 \left(\frac{a}{R} \right).$$

Esto se reduce a

$$T = \frac{1}{2}Ma.$$

Podemos así reemplazar a α por a/R porque el cordón no se desliza, y entonces la aceleración lineal del bloque es igual a la

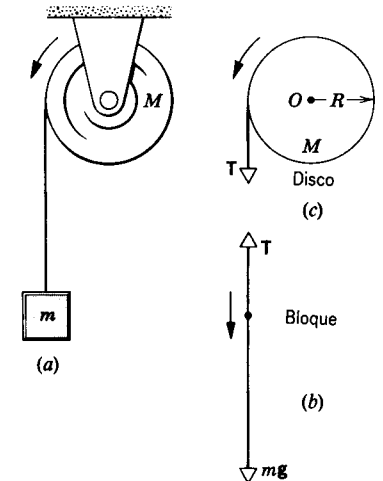


Figura 18 Problema muestra 5. (a) El bloque al caer hace que el disco gire. (b) Diagrama del cuerpo libre para el bloque. (c) Diagrama parcial del cuerpo libre para el disco. Las flechas muestran las direcciones tomadas como positivas.

aceleración lineal del borde del disco. Combinando las dos ecuaciones dinámicas, una para el bloque y la otra para el disco, eliminamos a T para obtener

$$a = g \frac{2m}{M + 2m} = (9.8 \text{ m/s}^2) \frac{(2)(1.2 \text{ kg})}{2.5 \text{ kg} + (2)(1.2 \text{ kg})} = 4.8 \text{ m/s}^2,$$

y al eliminar a a de las mismas ecuaciones, obtenemos que

$$T = mg \frac{M}{M + 2m} = (1.2 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) \frac{2.5 \text{ kg}}{2.5 \text{ kg} + (2)(1.2 \text{ kg})} = 6.0 \text{ N.}$$

Como lo esperábamos, la aceleración del bloque al caer es menor que g , y la tensión en el cordón ($= 6.0$ N) es menor que el peso del bloque colgante ($= mg = 11.8$ N). Vemos también que la aceleración del bloque y la tensión dependen de la masa del disco pero no de su radio. A modo de comprobación, observemos que las fórmulas arriba derivadas predicen que $a = g$ y que $T = 0$ para el caso de un disco sin masa ($M = 0$). Esto es lo que esperamos; el bloque simplemente cae como un cuerpo libre, arrastrando al cordón tras de él.

La aceleración angular del disco se deduce de

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{4.8 \text{ m/s}^2}{0.20 \text{ m}} = 24 \text{ rad/s}^2 = 3.8 \text{ rev/s}^2.$$

Problema muestra 6 Reconsidere el problema muestra 5 desde el punto de vista del trabajo y la energía.

Solución Supongamos que el sistema de la figura 18 ha salido del reposo. Lo examinamos más tarde cuando el bloque ha caído una distancia L ; en ese punto el bloque se mueve a una velocidad v , y el disco está girando a una velocidad angular ω . Si el cordón no se desliza sobre el disco, entonces $v = \omega R$; además, cuando el bloque cae una distancia L , el disco debe girar un ángulo ϕ de modo que $L = R\phi$.

Consideramos tres sistemas diferentes:

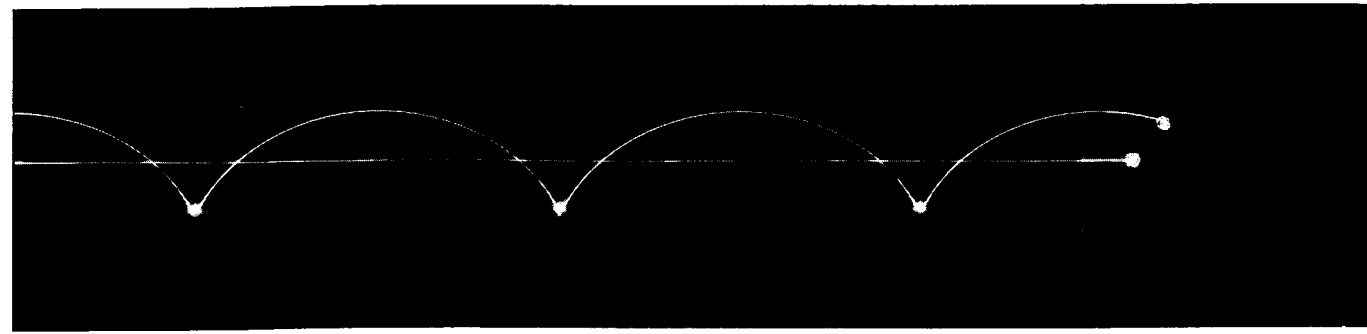


Figura 19 Fotografía con exposición en tiempo prolongado de un disco al girar. Se han fijado pequeñas luces al disco, una en su centro y otra en su borde. Esta última describe una curva llamada cicloide.

1. *Sistema = bloque + disco.* La gravedad (la única fuerza externa) efectúa un trabajo externo mgL sobre el sistema al moverse el bloque hacia abajo una distancia L . El trabajo externo neto es, entonces,

$$W_{\text{neto}} = mgL.$$

No existe un trabajo de fricción efectuado en el eje (sin fricción) o entre el cordón y el disco (donde no existe movimiento relacionado).

El cambio en la energía cinética es la energía cinética final, puesto que el sistema fue liberado desde el reposo:

$$\Delta K = K_f - K_i = K_f = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2.$$

El teorema trabajo-energía nos da

$$\begin{aligned} W_{\text{neto}} &= \Delta K \\ mgL &= \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}I\left(\frac{v}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}mv^2 \\ v^2 &= 2\left[\frac{2mg}{M+2m}\right]L. \end{aligned}$$

La cantidad entre corchetes es la aceleración que hallamos en el problema muestra 5, de modo que este resultado es, clara y sencillamente, la ya conocida ecuación $v^2 = v_0^2 + 2ax$ para el movimiento lineal con aceleración constante.

2. *Sistema = bloque.* Aquí el trabajo externo sobre el sistema es efectuado por la gravedad y por la tensión en el cordón:

$$W_{\text{neto}} = mgL - TL.$$

El cambio en la energía cinética del sistema (el bloque) es precisamente $\frac{1}{2}mv^2$, y el teorema trabajo-energía nos da

$$mgL - TL = \frac{1}{2}mv^2.$$

Sustituyendo el resultado anterior para v^2 , podemos demostrar que esto da la tensión hallada en la solución al problema muestra 5.

3. *Sistema = disco.* En este caso, solamente T ejerce un trabajo externo y al usar la ecuación 15 para una rotación en un ángulo total ϕ efectuada por una torca constante TR , obtenemos

$$W_{\text{neto}} = TR\phi = TL,$$

y el cambio en la energía cinética del sistema (el disco) es

$$\Delta K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)v^2/R^2 = \frac{1}{4}Mv^2.$$

Al aplicar nuevamente el teorema trabajo-energía, obtenemos

$$TL = \frac{1}{4}Mv^2.$$

Usted puede demostrar fácilmente que este resultado es consistente con los resultados anteriores para v^2 y T .

En cada caso, al definir cuidadosamente al sistema y clasificar las fuerzas y las torcas externas, obtenemos resultados idénticos de los enfoques basados en las leyes de Newton y las consideraciones de la energía.

12-6 MOVIMIENTOS DE ROTACIÓN Y DE TRASLACIÓN COMBINADOS

El movimiento general de un sistema de partículas comprende tanto traslación como rotación. Hasta ahora hemos considerado únicamente la rotación pura mediante la cual el eje de rotación está fijo en el marco de referencia inercial elegido. Ahora, generalizaremos un tanto permitiendo que el sistema tenga también un movimiento de traslación. Cuando el centro de masa se mueve a una velocidad de traslación v_{cm} , un observador que vea al sistema desde un marco de referencia inercial que se mueva con esa velocidad verá que el centro de masa está quieto. Para este observador, tendrá todavía aplicación la ecuación básica de la dinámica de la rotación (Ec. 18, $\Sigma \tau = I\alpha$) a condición de que (1) el eje de rotación pase por el centro de masa, y (2) el eje tenga siempre la misma dirección en el espacio (esto es, al moverse el sistema, su eje en un instante es paralelo al eje en cualquier otro instante). En esta sección consideraremos este caso especial del movimiento de rotación y de traslación combinado.

Quizás, el giro de una rueda es el ejemplo más conocido de este movimiento, en que el eje de rotación permanece en una dirección fija mientras el cuerpo se halla en movi-

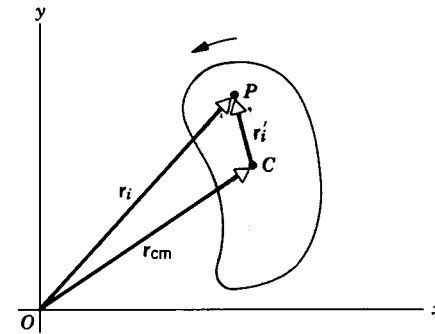


Figura 20 El centro de masa C de un cuerpo en movimiento de rotación y traslación está situado instantáneamente en la posición $\mathbf{r}_{\text{cm}}$. Una partícula arbitraria P del cuerpo está situada en $\mathbf{r}_i$ respecto al origen O y en $\mathbf{r}'_i$ respecto al centro de masa C .

miento de traslación. La figura 19 compara el movimiento de traslación del centro de masa de una rueda al rodar con el movimiento más complejo de un punto en la llanta, el cual debe describirse como una combinación de desplazamientos de traslación y de rotación.

Demostremos primero que, en este caso especial, la energía cinética de un cuerpo arbitrario puede expresarse como la suma de los términos independientes de la traslación y de la rotación. La figura 20 muestra un cuerpo arbitrario de masa M . El centro de masa C está ubicado instantáneamente en la posición $\mathbf{r}_{\text{cm}}$ respecto al origen del marco de referencia inercial elegido. Una partícula P de masa m_i está ubicada en la posición $\mathbf{r}_i$ respecto al origen y en la posición $\mathbf{r}'_i$ respecto al centro de masa del cuerpo. El movimiento de traslación está restringido al plano xy ; esto es, el vector $\mathbf{v}_i$ que describe el movimiento de m_i tiene sólo componentes x y y . El cuerpo gira también a una velocidad angular instantánea ω alrededor de un eje que pasa por el centro de masa. Con relación a O , la energía cinética de la partícula de masa m_i es $\frac{1}{2}m_i v_i^2$, y la energía cinética total del cuerpo se halla de la suma de todas esas partículas:

$$K = \sum \frac{1}{2}m_i v_i^2. \quad (20)$$

En la figura 20 vemos que $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{\text{cm}} + \mathbf{r}'_i$. Al diferenciar, hallamos la relación correspondiente entre las velocidades: $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{\text{cm}} + \mathbf{v}'_i$, donde $\mathbf{v}_i$ es la velocidad de la partícula en el sistema xy , $\mathbf{v}_{\text{cm}}$ es la velocidad del centro de masa, y $\mathbf{v}'_i$ es la velocidad de la partícula respecto al centro de masa. Observado desde el marco de referencia del centro de masa, el movimiento es una rotación pura alrededor de un eje que pasa por el centro de masa; entonces $\mathbf{v}'_i$ tiene la magnitud $\omega r'_i$.

La cantidad v_i^2 que aparece en la ecuación 20 puede expresarse como $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i$. Sustituyendo la expresión de la transformación de la velocidad, $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{\text{cm}} + \mathbf{v}'_i$, hallamos

$$\begin{aligned} K &= \sum \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2}m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = \sum \frac{1}{2}m_i (\mathbf{v}_{\text{cm}} + \mathbf{v}'_i) \cdot (\mathbf{v}_{\text{cm}} + \mathbf{v}'_i) \\ &= \sum \frac{1}{2}m_i (v_{\text{cm}}^2 + 2\mathbf{v}_{\text{cm}} \cdot \mathbf{v}'_i + v_i'^2). \end{aligned} \quad (21)$$

El segundo término de la ecuación 21, que podemos expresar por $v_{\text{cm}} \cdot (\Sigma v_i' \mathbf{v}'_i)$, incluye como factor al ímpetu total de todas las partículas en el marco del centro de masa ($\Sigma \mathbf{p}'_i = \Sigma m_i \mathbf{v}'_i = M \mathbf{v}_{\text{cm}}$, que es igual a cero porque $\mathbf{v}_{\text{cm}}' = 0$ en el marco del centro de masa. Así pues tenemos, sustituyendo a $v_i' = r'_i \omega$ en el último término de la ecuación 21,

$$\begin{aligned} K &= \sum \frac{1}{2}m_i v_{\text{cm}}^2 + \sum \frac{1}{2}m_i v_i'^2 \\ &= \frac{1}{2}M v_{\text{cm}}^2 + \sum \frac{1}{2}m_i r_i'^2 \omega^2 \\ &= \frac{1}{2}M v_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2}I_{\text{cm}} \omega^2. \end{aligned} \quad (22)$$

La ecuación 22 indica que la energía cinética total del objeto en movimiento consta de dos términos, uno asociado con la traslación pura del centro de masa del objeto a la velocidad $\mathbf{v}_{\text{cm}}$, y la otra asociada con la rotación pura alrededor del eje que pasa por el centro de masa. Los dos términos son bastante independientes: la rotación estaría presente incluso en ausencia de traslación (por ejemplo, como se observaría desde un marco de referencia que se moviese a razón de $\mathbf{v}_{\text{cm}}$). Las velocidades $\mathbf{v}_{\text{cm}}$ y ω son, en este caso general, independientes entre sí: podemos proporcionar cualquier cantidad de energía cinética de rotación y cualquier cantidad de energía cinética de traslación. Por ejemplo, en el lanzamiento de un satélite desde un taxi espacial (véase la figura 34 de este capítulo y la figura 15 del capítulo 13), el satélite se coloca girando alrededor de su eje para su estabilidad (como estudiaremos en el capítulo 13) e independientemente se le da la velocidad de traslación necesaria para ponerlo en órbita.

Problema muestra 7 Un yoyo (Fig. 21) de masa $M = 0.023$ kg, que consta de dos discos de radio $R = 2.6$ cm unidos por un eje de radio $R_0 = 0.3$ cm, está girando en el extremo de un cordón de longitud $L = 0.84$ m con una velocidad angular ω_0 . ¿Qué velocidad angular se necesita para que el yoyo suba por el cordón? Suponga que el cordón tiene un espesor despreciable.

Solución Al comenzar la subida, sólo existe energía cinética de rotación, pero, al final, ésta es, en parte, energía cinética de rotación, en parte energía cinética de traslación, y en parte energía potencial gravitatoria. La conservación de la energía nos da, entonces,

$$\frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2 + MgL,$$

donde ω y v son las velocidades finales angular y lineal. No podemos resolver este problema sencillamente para un yoyo real, pero podemos resolverlo para el yoyo ideal con un cordón de espesor despreciable hallando la condición necesaria para que el yoyo llegue justo a la mano (llegando con $v = \omega = 0$):

$$\frac{1}{2}I\omega_0^2 = MgL.$$

Usando la inercia de rotación de un disco ($I = \frac{1}{2}MR^2$) y despreciando la contribución del eje a la inercia de rotación, resolvemos para ω_0 y hallamos

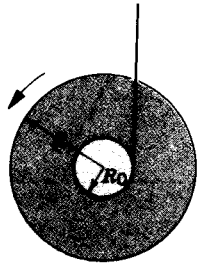


Figura 21 Problema muestra 7. Un yoyo, mostrado en sección transversal. El cordón, de un espesor que se supone despreciable, está enrollado alrededor de un eje de radio R_0 .

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4gL}{R^2}} = \sqrt{\frac{4(9.8 \text{ m/s}^2)(0.84 \text{ m})}{(0.026 \text{ m})^2}} = 221 \text{ rad/s} = 35 \text{ rev/s}.$$

Esta considerable velocidad de rotación es sólo un límite inferior. Los valores de la velocidad angular de rotación en exceso de 100 rev/s son bastante comunes, especialmente si el yoyo es lanzado hacia abajo de modo que su energía de traslación inicial se convierte en energía de rotación. En el caso de una velocidad angular inicial grande, llegaría a la mano con una velocidad lineal considerable. De hecho, un truco muy conocido consiste en soltar el cordón del dedo en el último momento, permitiendo que la velocidad vertical del yoyo lo lleve a varios metros hacia arriba.

La interacción de las energías cinéticas de traslación, de rotación, y de la potencial gravitatoria es la causante del comportamiento del yoyo y de los muchos trucos que pueden hacerse con él.*

Rodamiento sin deslizamiento

Consideremos ahora un caso especial de movimiento combinado de traslación y de rotación, por el cual el objeto rueda por una superficie de modo tal que no existe movimiento relativo entre el objeto y la superficie en el punto instantáneo de contacto. Este caso especial se conoce como *rodamiento sin deslizamiento*. La figura 22 muestra la fotografía de una rueda de bicicleta que está girando. Podemos ver cómo los rayos de la parte inferior, que está instantáneamente en reposo, tienen un enfoque más preciso que los de la parte superior, los cuales se ven borrosos. ¡La parte superior de la rueda se mueve claramente más rápidamente que la inferior! La fricción entre la rueda y la superficie es, claro está, la causante del rodamiento sin deslizamiento, pero en este caso especial la fuerza de fricción no trabaja y no disipa energía, porque no existe movimiento entre la rueda y la superficie en el punto de contacto. Si bien en el problema existe movimiento, la fuerza es de fricción *estática*.

* Véase "The Yo-Yo: A Toy Flywheel", por Wolfgang Burger, *American Scientist*, marzo-abril de 1984, pág. 137.

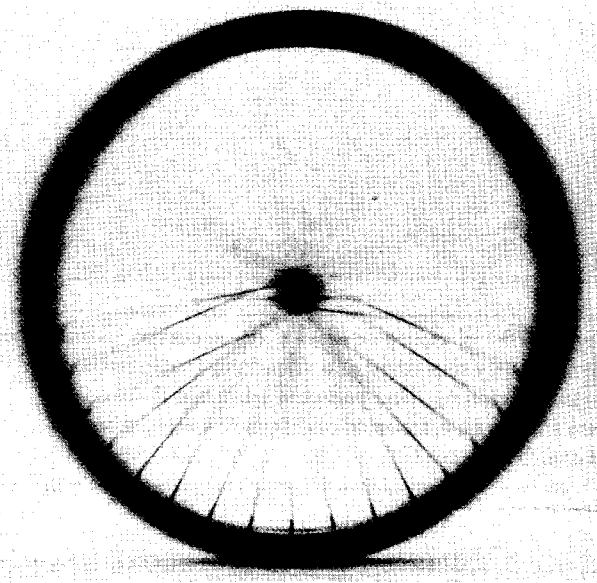


Figura 22 Fotografía de una rueda de bicicleta girando. Nótese que los rayos de la parte superior de la rueda se ven más borrosos que los de la parte inferior. Ello se debe a que la parte superior tiene una velocidad lineal más grande.

No todos los casos de rodamiento sobre una superficie con fricción consisten en rodamiento sin deslizamiento. Por ejemplo, imaginemos que un automóvil trata de arrancar en una calle cubierta de hielo. Al principio, puede que las ruedas giren sin desplazarse; en este caso, tenemos una rotación pura sin traslación y existe una gran cantidad de trabajo de fricción efectuado, como lo indica el hielo que se funde por el aumento de la energía interna resultante del trabajo de fricción. Si se vierte arena sobre el hielo, las ruedas giran aún más rápidamente, pero el automóvil comienza a avanzar poco a poco. Ahora queda todavía cierto deslizamiento entre la llanta y el hielo, de modo que la fuerza de fricción está todavía efectuando un trabajo, sólo que con cierto movimiento de traslación. Únicamente en el caso en que las llantas cesan de resbalar sobre el hielo, de modo que no haya movimiento en el punto de contacto entre la llanta y el hielo, nos encontramos con una situación de rodamiento sin deslizamiento y sin trabajo de fricción.

La figura 23 muestra una manera de ver al rodamiento sin deslizamiento como una superposición de movimientos de rotación y de traslación. La figura 23a muestra el movimiento de traslación, en que el centro de masa C se mueve a velocidad v_{cm} , y la figura 23b muestra el movimiento de rotación a la velocidad angular ω . Cuando se superponen los dos movimientos, el fondo B de la rueda tendrá una velocidad $v_{cm} - \omega R$; si ésta es cero, de modo que el punto de contacto esté en reposo, entonces debemos tener que $v_{cm} = \omega R$. Al superponer los movimientos de traslación y de rotación resultantes, obtenemos la figu-

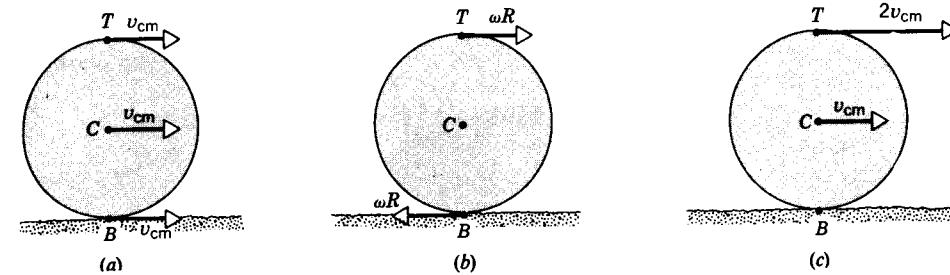


Figura 23 El rodamiento puede considerarse una superposición de traslación y rotación puras con respecto al centro de masa. (a) Movimiento de traslación, en el que todos los puntos se mueven con la misma velocidad lineal. (b) Movimiento de rotación, en el que todos los puntos se mueven con la misma velocidad angular alrededor del eje central. (c) La superposición de (a) y (b), donde las velocidades en T , C , y B han sido obtenidas por la suma vectorial de las componentes de la traslación y de la rotación.

ra 23c. Nótese que la velocidad lineal en la parte superior de la rueda T es exactamente el doble de la del centro.

Para una rotación pura la velocidad tangencial tiene la magnitud $v = \omega R$. Entonces, para el caso especial del rodamiento sin deslizamiento, los movimientos de rotación y de traslación deben estar relacionados por

$$v_{cm} = \omega R. \quad (23)$$

Este resultado se aplica *únicamente* en el caso del rodamiento sin deslizamiento. En el caso general de los movimientos de traslación y de rotación combinados, la velocidad tangencial $v (= \omega R)$ no es igual a v_{cm} .

La energía cinética de los movimientos de rotación y de traslación combinados, ecuación 22, ya no tiene dos términos independientes en el caso del rodamiento sin deslizamiento. Podemos ver a la energía cinética como si estuviese completamente determinada, bien por la velocidad de traslación o bien por la velocidad de rotación, y obtenemos las expresiones correspondientes al sustituir la ecuación 23 en la ecuación 22:

$$K = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} v_{cm}^2 / R^2, \quad (24a)$$

$$K = \frac{1}{2} M \omega^2 R^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2. \quad (24b)$$

En cualquier caso, es suficiente un solo parámetro (v_{cm} o ω) para determinar la energía cinética.

Otra visión del rodamiento sin deslizamiento

Existe otra manera instructiva de analizar el rodamiento sin deslizamiento: consideremos que el punto de contacto en B sea un eje instantáneo de rotación, como se ilustra en la figura 24. En cada instante existe un nuevo punto de contacto B y, por lo tanto, un nuevo eje de rotación, pero instantáneamente el movimiento consiste en una rotación pura en torno a B . La energía cinética es

$$K = \frac{1}{2} I_B \omega_B^2, \quad (25)$$

donde I_B es la inercia de rotación y ω_B es la velocidad angular, ambas consideradas en torno al eje de rotación que pasa por B . Partiendo del teorema del eje paralelo, $I_B = I_{cm} + MR^2$, donde R es la distancia entre B y el centro de masa. Sabemos que el centro de masa se mueve a velocidad v_{cm} , y entonces el movimiento de rotación en torno a B debe dar al centro de masa la velocidad tangencial apropiada: $v_{cm} = R\omega_B$. Ahora podemos expresar la energía cinética, usando la ecuación 25,

$$K = \frac{1}{2} (I_{cm} + MR^2) \left(\frac{v_{cm}}{R} \right)^2 = \frac{1}{2} I_{cm} \omega_B^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2. \quad (26)$$

La velocidad angular del centro de masa respecto a B debe ser la misma que la velocidad angular de B respecto al centro de masa; entonces $\omega_B = \omega$, y la energía cinética se convierte en idéntica a la dada por las ecuaciones 24. En este caso, la derivación se ha hecho suponiendo que las partes de la rotación y la traslación de la energía cinética no son independientes.

Problema muestra 8 Un cilindro sólido de masa M y radio R rueda hacia abajo sin deslizamiento por un plano inclinado de

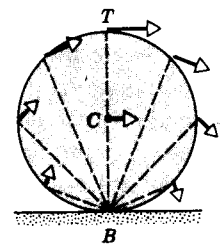


Figura 24 Puede considerarse que un cuerpo, al rodar, gira alrededor de un eje instantáneo en el punto de contacto B . Los vectores muestran las velocidades lineales instantáneas de puntos seleccionados.

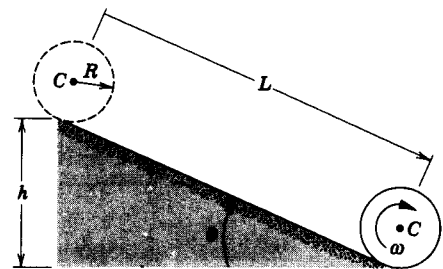


Figura 25 Problema muestra 8. Un cilindro rueda sin deslizamiento por un plano inclinado.

longitud L y altura h (Fig. 25). Halle la velocidad de su centro de masa cuando el cilindro llega abajo.

Solución Para resolver este problema usamos la conservación de la energía. El cilindro está inicialmente en reposo. En el fondo del plano inclinado, el cambio de la energía potencial es $\Delta U = -Mgh$. Si el cilindro comienza desde el reposo, su energía cinética cambia en una cantidad dada por la ecuación 24a. Para un cilindro que gire en torno a su eje, $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$. Si no existen otros intercambios de energía, entonces $\Delta E = 0$ da $\Delta K = -\Delta U$, o sea

$$\frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}(MR^2)\left(\frac{v_{cm}}{R}\right)^2 = Mgh.$$

Resolviendo para v_{cm} , obtenemos

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}.$$

La velocidad del centro de masa debería de haber sido $v_{cm} = \sqrt{2gh}$ si el cilindro se deslizara hacia abajo (sin rodar) por un plano inclinado sin fricción. La velocidad del cilindro al rodar es, por lo tanto, menor que la velocidad del cilindro al deslizarse porque, para el cilindro que rueda, parte de la energía potencial inicial ha sido transformada en energía cinética de rotación, dejando disponible menos energía para la parte de traslación de la energía cinética. Aunque el cilindro llegue rodando al fondo del plano inclinado más tarde que un cilindro idéntico que se deslice habiendo comenzado a bajar al mismo tiempo por el plano inclinado sin fricción, pero por lo demás idéntico, ambos llegan al fondo con la misma cantidad de energía; el cilindro que rueda tiene un movimiento rotatorio a la vez que se traslada, mientras el cilindro que se desliza no tiene ese movimiento rotatorio.

El problema muestra anterior fue resuelto mediante las técnicas de la energía. Podemos también resolver problemas de este tipo usando métodos dinámicos basados en fuerzas y torcas. Al hacerlo así, es conveniente usar la forma de rotación de la segunda ley de Newton, $\Sigma \tau = I\alpha$, alrededor de un eje que pase por el centro de masa. Dejamos acentadas nuevamente las dos condiciones especiales que nos permitan aplicar este resultado cuando el eje de rotación no esté fijo en el espacio: (1) el eje pasa por el centro de masa del objeto que gira, y (2) el eje no cambia su dirección en el espacio al moverse el objeto. Este problema satisface ambas condiciones.

En la figura 26 se muestra el diagrama del cuerpo libre para este problema. Mg es el peso del cilindro que actúa

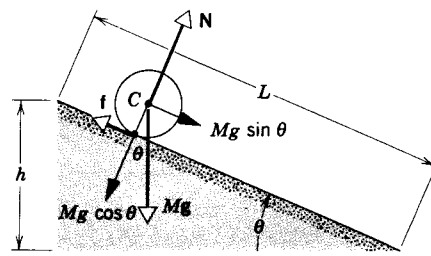


Figura 26 Las fuerzas que actúan sobre el cilindro rodante del problema muestra 8.

verticalmente hacia abajo a través del centro de masa, N es la fuerza normal ejercida por el plano inclinado sobre el cilindro, y f es la fuerza de fricción estática que actúa hacia arriba a lo largo del plano inclinado en el punto de contacto.

Usando la segunda ley de Newton para el movimiento de traslación, obtenemos, para un movimiento perpendicular al plano inclinado,

$$N - Mg \cos \theta = 0,$$

y, para un movimiento a lo largo del plano inclinado,

$$Mg \sin \theta - f = Ma_{cm}.$$

Consideremos ahora el movimiento de rotación. Ni N ni Mg tienen torcas en torno al centro de masa C porque sus líneas de acción pasan por C , y tienen brazos de momento nulos. La fuerza de la fricción tiene un brazo de momento R en torno a C , de modo que $\tau = fR$ y entonces

$$fR = I_{cm}\alpha$$

$$f = I_{cm}\alpha/R.$$

La inercia de rotación en torno al centro de masa es $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$. Para un rodamiento sin deslizamiento, $v_{cm} = \omega R$; al diferenciar, se deduce que $a_{cm} = \alpha R$, y la ecuación anterior resulta ser

$$f = (\frac{1}{2}MR^2)(a_{cm}/R) = \frac{1}{2}Ma_{cm}.$$

Sustituyendo ésta en la segunda ecuación de traslación, hallamos que

$$a_{cm} = \frac{2}{3}g \sin \theta.$$

Esto es, la aceleración del centro de masa del cilindro al rodar ($\frac{2}{3}g \sin \theta$) es menor de lo que sería su aceleración si el cilindro se deslizara por el plano inclinado ($g \sin \theta$). Este resultado se cumple en cualquier instante, sin importar la posición del cilindro en el plano inclinado.

Puesto que a_{cm} es constante, podemos hallar la velocidad del centro de masa, comenzando desde el reposo. Según la ecuación 20 del capítulo 2, $v^2 = v_0^2 + 2ax$, o sea

$$v_{cm}^2 = 2a_{cm}L,$$

de modo que

$$v_{cm}^2 = 2(\frac{2}{3}g \sin \theta)L = \frac{4}{3}g \left(\frac{h}{L}\right)L = \frac{4}{3}gh$$

o sea

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}.$$

Este resultado es el mismo que el obtenido anteriormente por el método de la energía. El método de la energía es ciertamente más sencillo y más directo. Sin embargo, si estamos interesados en conocer los valores de las fuerzas, tales como N y f , debemos usar un método dinámico.

Este método determina la fuerza de fricción estática necesaria para el rodamiento:

$$f = Ma_{cm}/2 = (M/2)(\frac{2}{3}g \sin \theta) = \frac{1}{3}Mg \sin \theta.$$

¿Qué pasaría si la fuerza de fricción estática entre las superficies fuese menor que este valor?

Problema muestra 9 Una esfera, un cilindro, y un aro comienzan desde el reposo y ruedan hacia abajo por el mismo plano inclinado. ¿Cuál de todos estos cuerpos será el primero en llegar al fondo?

Solución Resolveremos este problema comparando las aceleraciones de los centros de masa de los tres objetos. El que tenga la aceleración mayor será el primero en llegar al fondo.

A partir de los cálculos anteriores, tenemos la siguiente ecuación general dinámica para el movimiento a lo largo del plano:

$$Mg \sin \theta - f = Ma_{cm},$$

donde

$$f = I_{cm}\alpha/R = I_{cm}a_{cm}/R^2.$$

Sustituyendo a f y resolviendo para a_{cm} , hallamos

$$a_{cm} = \frac{g \sin \theta}{1 + I_{cm}/MR^2}. \quad (27)$$

Podemos evaluar esta expresión para cada uno de los objetos:

$$\text{Esfera: } \frac{I_{cm}}{MR^2} = \frac{2}{5}, \quad a_{cm} = \frac{g \sin \theta}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{5}{7}g \sin \theta = 0.714g \sin \theta,$$

$$\text{Cilindro: } \frac{I_{cm}}{MR^2} = \frac{1}{2}, \quad a_{cm} = \frac{g \sin \theta}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}g \sin \theta = 0.667g \sin \theta,$$

$$\text{Aro: } \frac{I_{cm}}{MR^2} = 1, \quad a_{cm} = \frac{g \sin \theta}{1 + 1} = \frac{1}{2}g \sin \theta = 0.500g \sin \theta.$$

Claramente la esfera tiene la mayor aceleración y es la primera en llegar al fondo, seguida por el cilindro y luego por el aro. La esfera es el objeto más "compacto" y puede aceptar una rotación con el menor costo en energía cinética, puesto que su inercia de

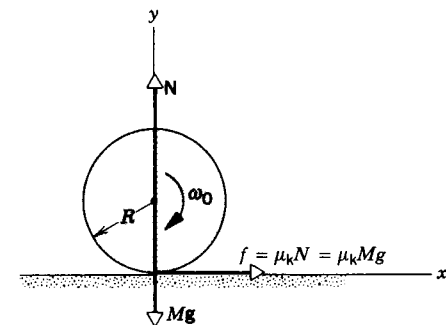


Figura 27 Problema muestra 10. Un cilindro que inicialmente gira a una velocidad angular ω_0 hace contacto con una superficie horizontal que ejerce una fuerza de fricción f sobre el cilindro.

rotación es la más pequeña de las tres. Cada cuerpo tiene una energía cinética igual a Mgh en el fondo del plano inclinado; en la esfera, se halla en mayor cantidad la energía cinética del tipo de traslación y en menor cantidad la energía cinética del tipo de rotación.

Usted debería poder resolver también este problema utilizando los métodos de la energía al hallar cuál de los objetos tiene la v_{cm} más grande en el fondo del plano inclinado.

Obsérvese que nuestro resultado final para la aceleración de cada objeto no depende ni de la masa ni del radio del objeto. Los tres objetos pueden ser de tamaños bastante diferentes, pero la esfera siempre será la primera en llegar al fondo. Además, todas las esferas tienen al rodar la misma aceleración, sin importar cuáles sean sus tamaños o masas respectivos; una canica y una bola de boliche llegarán al fondo al mismo tiempo y con la misma velocidad.

Problema muestra 10 A un cilindro sólido uniforme de radio R ($= 12$ cm) y de masa M ($= 3.2$ kg) se le da una velocidad angular inicial ω_0 (en sentido de las manecillas del reloj) de 15 rev/s y luego se le hace descender a una superficie horizontal plana. El coeficiente de fricción cinética entre la superficie y el cilindro es $\mu_k = 0.21$. Inicialmente, el cilindro se desliza al moverse a lo largo de la superficie, pero después de un tiempo t inicia un rodamiento puro sin deslizamiento. (a) ¿Cuál es la velocidad v_{cm} del centro de masa en el tiempo t ? (b) ¿Cuál es el valor de t ?

Solución (a) La figura 27 muestra las fuerzas que actúan sobre el cilindro. Puesto que todas las fuerzas son constantes mientras ocurre el deslizamiento, la aceleración a_{cm} del centro de masa en la dirección x es constante. Entonces, para el movimiento de traslación, podemos escribir

$$\Sigma F_x = Ma_{cm} = M \left(\frac{v_f - v_i}{t - 0} \right).$$

Aquí, $v_i = 0$ y $v_f = v_{cm}$, la velocidad en t cuando se inicia el rodamiento puro. También, la única fuerza horizontal es la de fricción, dada por $\mu_k Mg$, de modo que

$$\mu_k Mg = Mv_{cm}/t. \quad (28)$$

La aceleración angular α alrededor de un eje que pase por el centro de masa es también constante (¿por qué?), de modo que, para el movimiento de rotación, podemos escribir

$$\sum \tau = I_{\text{cm}} \alpha = I_{\text{cm}} \left(\frac{\omega_f - \omega_i}{t - 0} \right).$$

Aquí, eligiendo que las rotaciones en sentido contrario a las manecillas sean positivas, $\omega_f = -v_{\text{cm}}/R$, la velocidad angular en el tiempo t , y $\omega_i = -\omega_0$. Solamente la fuerza f produce una torca en torno al centro de masa; la torca resultante es $\mu_k MgR$, una cantidad positiva. Usando $\sum \tau = I\alpha$, obtenemos

$$\mu_k MgR = \left(\frac{1}{2} MR^2 \right) \left(\frac{-v_{\text{cm}}/R - (-\omega_0)}{t} \right). \quad (29)$$

Eliminando a t de las ecuaciones 28 y 29 y resolviendo para v_{cm} , obtenemos

$$v_{\text{cm}} = \frac{1}{3} \omega_0 R = \frac{1}{3} (15 \text{ rev/s}) (2\pi \text{ rad/rev}) (0.12 \text{ m}) = 3.8 \text{ m/s}.$$

PREGUNTAS

1. ¿Puede la masa de un objeto considerarse como concentrada en su centro de masa con el fin de calcular su inercia de rotación? Si se puede, explique por qué. Si no, plantee un contraejemplo.
2. ¿Alrededor de qué eje es la inercia de rotación del cuerpo humano mínima? En torno a qué eje que pase por el centro de masa es nuestra inercia de rotación la mayor?
3. ¿En torno a qué eje tendría un cubo una inercia de rotación mínima?
4. Si dos discos circulares del mismo peso y espesor están hechos de metales con densidades diferentes, ¿qué disco, en caso de haber alguno, tendrá la mayor inercia de rotación en torno a su eje de simetría?
5. Va a determinarse la inercia de rotación de un cuerpo de forma considerablemente complicada. La forma hace extremadamente difícil el cálculo matemático de $\int r^2 dm$. Sugiera modos en los que la inercia de rotación en torno a un eje particular podría medirse experimentalmente.
6. En la figura 28 se muestran cinco sólidos en sección transversal. Las secciones transversales tienen igual altura e igual anchura máxima. Los sólidos tienen masas iguales. ¿Cuál de ellos tiene la inercia de rotación más grande en torno a un eje perpendicular que pase por el centro de masa? ¿Cuál tiene la más pequeña?

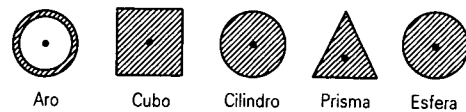


Figura 28 Pregunta 6

7. ¿Se cumpliría la ecuación 9 si la placa no fuese “delgada”, esto es, si su espesor fuera comparable a (o incluso mayor que) a o b ?
8. La figura 29a muestra una regla de un metro, de la que una mitad es de madera y la otra mitad de acero, y cuyo

Nótese que v_{cm} no depende de los valores de M , g , o μ_k . Sin embargo, ¿qué ocurriría si cualquiera de estas cantidades fuese cero?

(b) Al eliminar a v_{cm} entre las ecuaciones 28 y 29, podemos resolver para t y hallar

$$t = \frac{\omega_0 R}{3\mu_k g} = 1.8 \text{ s}.$$

Como ejercicio, debería usted de comprobar estos resultados usando los métodos de la energía. Halle el cambio de energía cinética de rotación y compárelo con el trabajo efectuado por la torca de fricción. Nótese que, debido a que ocurre una rotación con deslizamiento entre el tiempo 0 y el tiempo t , el trabajo de fricción se efectúa durante ese periodo.

extremo de madera está pivoteado en O . Se aplica una fuerza al extremo de acero en a . En la figura 29b, la regla está pivoteada en el extremo de acero en O' y la misma fuerza se aplica en el extremo de madera en a' . ¿Se obtiene la misma aceleración angular en cada caso? Si no, ¿en qué caso es mayor la aceleración angular?

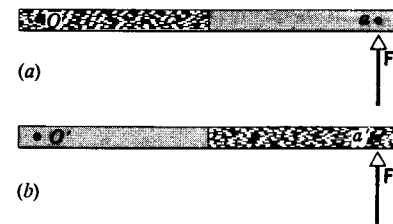


Figura 29 Pregunta 8.

9. Al talar un árbol, un leñador hace un corte en el lado que da a la dirección en que va a caer el árbol. Explique por qué. ¿Estaría uno a salvo permaneciendo directamente detrás del árbol en el lado contrario a la caída?
10. Usted puede distinguir un huevo crudo de uno cocido haciéndolos girar a ambos sobre una mesa. Explique cómo. También, si usted detiene el giro de un huevo crudo con los dedos y lo suelta rápidamente, continuará girando. ¿Por qué?
11. Comente cada una de las siguientes aseveraciones sobre el deporte del esquí. (a) En una carrera de descenso, conviene utilizar esquís que no giren con facilidad. (b) En una carrera de slalom, convienen los esquís que den vuelta fácilmente. (c) Por lo tanto, la inercia de rotación de los esquís en descenso debería ser más grande que la de los esquís para slalom. (d) Considerando que existe una fricción baja entre los esquís y la nieve, ¿cómo ejerce el esquiador las torcas para girar a los lados o para detener

un giro? (Véase “The Physics of Ski Turns”, por J. I. Shonie y D. L. Mordick, *The Physics Teacher*, diciembre de 1972, pág. 491.)

12. Considérese una vara recta apoyada en su extremo sobre el hielo (sin fricción). ¿Cuál sería la trayectoria de su centro de masa al caer?
13. Para almacenar energía eólica o energía solar, se han sugerido volantes. La cantidad de energía que puede ser almacenada en un volante depende de la densidad y de la resistencia a la tracción del material de que esté hecho el volante y, para un peso dado, es necesario el material recio de la menor densidad disponible. ¿Puede usted explicar esto? (Véase “Flywheels”, por R. F. Post y S. F. Post, *Scientific American*, diciembre de 1973, pág. 17.)
14. Explique por qué una rueda que gira sobre una superficie horizontal plana no disminuye su marcha debido a la fricción estática. Suponiendo que no haya deslizamiento, ¿qué obligaría a la rueda a disminuir la marcha?
15. Describa cualitativamente qué le sucede al sistema de la figura 18 si se le imprime al disco una velocidad angular inicial, en sentido de las manecillas del reloj, antes de ser liberado. ¿Qué cambios ocurren, si los hay, en la aceleración lineal del bloque, o en la aceleración angular del disco? Véase el problema muestra 5.
16. Explique por qué la rueda es un invento tan importante.
17. Aparte de su aspecto exterior, ¿por qué los automóviles deportivos tienen ruedas de rayos?
18. Una bala de cañón y una canica ruedan desde el reposo por una pendiente hacia abajo. ¿Cuál de las dos llega primero al fondo?
19. Un envase cilíndrico de hojalata lleno de carne de res y otro envase idéntico lleno de jugo de manzana ruedan por un plano inclinado hacia abajo. Compare sus aceleraciones angular y lineal. Explique la diferencia.
20. Un cilindro sólido de madera rueda hacia abajo por dos planos inclinados diferentes de la misma altura pero con ángulos de inclinación distintos. ¿Llegará al fondo con la misma velocidad en cada caso? ¿Tardará más tiempo en rodar por una pendiente que por la otra? Explique las respuestas.
21. Un cilindro sólido de latón y un cilindro sólido de madera tienen el mismo radio y masa, siendo más largo el cilindro de madera. Usted los suelta juntos en la parte superior de un plano inclinado. ¿Cuál le ganará al otro en llegar al fondo? Supongamos ahora que los cilindros sean de la misma longitud (y radio) y que las masas sean iguales por haber practicado un orificio a lo largo del eje del cilindro de latón. ¿Cuál de los dos cilindros ganará la carrera ahora? Explique las respuestas. Suponga que los cilindros ruedan sin deslizarse.
22. Ruth y Rogelio pasean en bicicleta a lo largo de una trayectoria a la misma velocidad. Las ruedas de la bicicleta de Ruth son de un diámetro un poco mayor que las ruedas de la bicicleta de Rogelio. ¿Cómo se comparan las velocidades angulares de sus ruedas? ¿Qué puede decir sobre las velocidades de las partes superiores de las ruedas?
23. Un tambo cilíndrico, empujado por una tabla desde una posición inicial que se muestra en la figura 30, rueda hacia

adelante en el suelo una distancia $L/2$, igual a la mitad de la longitud de la tabla. No existe deslizamiento en ningún punto de contacto. ¿Dónde estará la tabla entonces? ¿Qué distancia habrá recorrido el hombre?

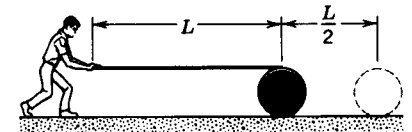


Figura 30 Pregunta 23

24. Dos discos pesados están unidos por una barra corta de radio mucho menor. El sistema está situado sobre una rampa de modo que los discos cuelgan por los lados como en la figura 31. El sistema rueda rampa abajo sin deslizamiento. (a) Cerca del fondo de la rampa los discos tocan a la mesa horizontal y el sistema continúa con una mayor velocidad de traslación. Explique por qué. (b) Si este sistema compitiera con un anillo (de cualquier radio) en descenso por la rampa, ¿cuál llegaría al fondo primero?

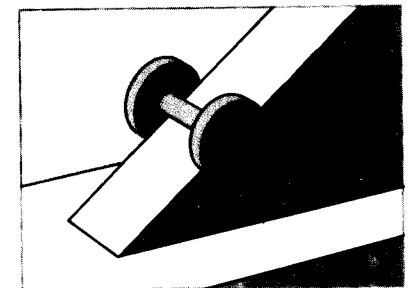


Figura 31 Pregunta 24.

25. Un yoyo cae hasta el final de su cordón y luego sube por él. ¿Se invierte la dirección de la rotación en el extremo final del cordón? Explique la respuesta.
26. Un yoyo descansa sobre una mesa horizontal y puede rodar libremente (véase la Fig. 32). Si se jala del cordón

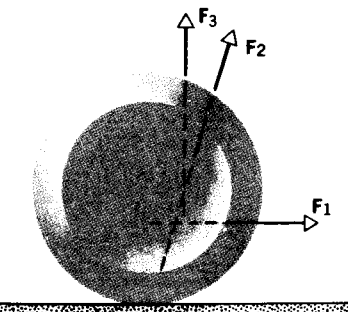


Figura 32 Pregunta 26.

con una fuerza horizontal, como F_1 , ¿en qué sentido rotará el yoyo? ¿Qué sucede cuando se aplica la fuerza F_2 (pasando su línea de acción por el punto de contacto entre el yoyo y la mesa)? Si se jala del cordón verticalmente con la fuerza F_3 , ¿qué sucede?

27. Una rueda de reborde sólida consta de dos discos concéntricos unidos, el más grande de los cuales tiene un radio R y el más pequeño un radio r . La rueda va a rodar a lo largo de un riel de dos niveles, como se muestra en la figura 33. Sin embargo, al dar un giro, el centro de la rueda se mueve una distancia $2\pi r$, según el disco más pequeño y $2\pi R$ según el disco más grande. Explique la aparente discrepancia.

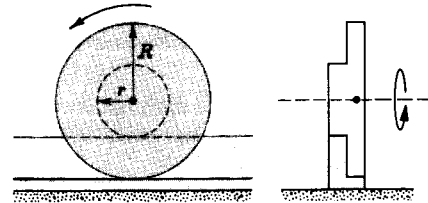


Figura 33 Pregunta 27.

28. Enuncie las tres leyes de Newton para el movimiento en términos que correspondan a cuerpos en rotación.

PROBLEMAS

Sección 12-2 Energía cinética de la rotación e inercia de la rotación

- Las masas y coordenadas de cuatro partículas son las siguientes: 50 g, $x = 2.0$ cm, $y = 2.0$ cm; 25 g, $x = 0$, $y = 4.0$ cm; 25 g, $x = -3.0$ cm, $y = -3.0$ cm; 30 g, $x = -2.0$ cm, $y = 4.0$ cm. Calcule la inercia de rotación de este conjunto con respecto a los ejes (a) x , (b) y , y (c) z .
- Una molécula tiene una inercia de rotación de $14,000 \text{ u} \cdot \text{pm}^2$ y está girando a una velocidad angular de $4.30 \times 10^{12} \text{ rad/s}$. (a) Exprese la inercia de rotación en $\text{kg} \cdot \text{m}^2$. (b) Calcule la energía cinética de rotación en eV.
- La molécula de oxígeno tiene una masa total de $5.30 \times 10^{-26} \text{ kg}$ y una inercia de rotación de $1.94 \times 10^{-46} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ en torno a un eje que pasa por el centro perpendicular a la línea que une a los átomos. Supóngase que tal molécula en el seno de un gas tiene una velocidad media de 500 m/s y que su energía cinética de rotación es de dos tercios de su energía cinética de traslación. Halle su velocidad angular promedio.

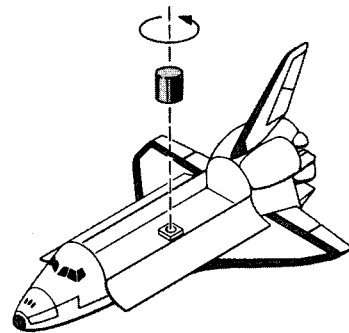


Figura 34 Problema 4.

Sección 12-3 Inercia de rotación de los cuerpos sólidos

- Un satélite de comunicaciones es un cilindro uniforme con 1220 kg de masa, 1.18 m de diámetro, y 1.72 m de longitud. Antes de lanzarlo desde la plataforma del taxi espacial, se le hace girar a razón de 1.46 rev/s en torno al eje del cilindro; véase la figura 34. Calcule la energía cinética de rotación del satélite.
- Cada una de las tres palas del rotor del helicóptero que se muestra en la figura 35 tiene 5.20 m de longitud y una masa de 240 kg. El rotor gira a 350 rev/min. (a) ¿Cuál es la inercia de rotación del conjunto del rotor en torno al eje de rotación? (Cada pala puede considerarse como una varilla.) (b) ¿Cuál es la energía cinética de rotación?
- La figura 36 muestra un bloque uniforme de masa M y aristas de longitudes a , b , y c . Calcule su inercia de rotación alrededor de un eje que pase por una esquina y

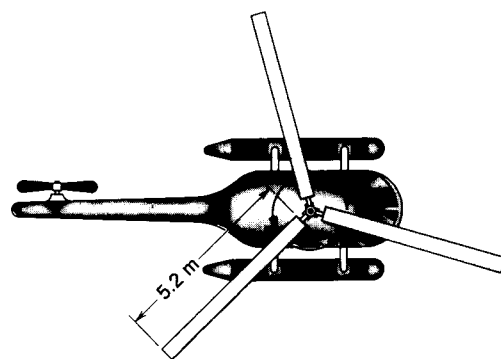


Figura 35 Problema 5.

sea perpendicular a la cara grande del bloque. (Sugerencia: Véase la Fig. 9.)

- Calcule la inercia de rotación de una regla de un metro, cuya masa es de 0.56 kg, en torno a un eje perpendicular a la regla y que está situado en la marca de 20 cm.
- Dos partículas, cada una de masa m , están unidas entre sí y a un eje de rotación por dos varillas, cada una de longitud

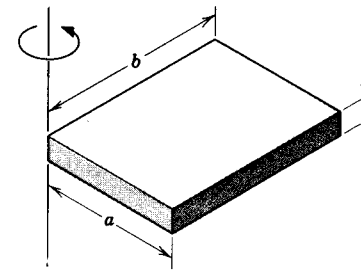


Figura 36 Problema 6.

L y masa M , como se muestra en la figura 37. La combinación gira alrededor del eje de rotación con una velocidad angular ω . Obtenga las expresiones algebraicas para (a) la inercia de rotación de la combinación en torno a O y (b) la energía cinética de rotación en torno a O .

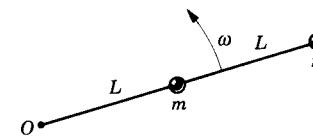


Figura 37 Problema 8.

- (a) Demuestre que la suma de las inercias de rotación de un cuerpo laminar plano en torno a dos ejes perpendiculares cualesquiera en el plano del cuerpo es igual a la inercia de rotación del cuerpo en torno a un eje perpendicular al plano que pase por el punto donde se intersectan. (b) Aplique esto a un disco circular para hallar su inercia de rotación en torno a un diámetro como eje.
- En Europa se utilizan en algunos casos camiones de entregas que operan haciendo uso de la energía almacenada en un volante giratorio. Los camiones son cargados haciendo uso de un motor eléctrico para llevar al volante a su velocidad máxima de 624 rad/s. Este volante es un cilindro sólido, homogéneo, con una masa de 512 kg y un radio de 97.6 cm. (a) ¿Cuál es la energía cinética del volante después de la carga? (b) Si el camión opera con un requerimiento de potencia de 8.13 kW en promedio, ¿durante cuántos minutos puede operar entre cargas?
- (a) Demuestre que un cilindro sólido de masa M y radio R es equivalente a un aro delgado de masa M y radio $R/\sqrt{2}$, cuando ambos giran en torno a un eje central. (b) La distancia radial desde un eje dado en el que pudiera estar concentrada la masa del cuerpo sin alterarse la inercia de rotación del cuerpo en torno a ese eje se llama *radio de giro*. Sea que k represente al radio de giro y demuestre que

$$k = \sqrt{I/M}.$$

Esto da el radio del "aro equivalente" en el caso general.

- La figura 38 muestra la barra sólida que se consideró en la sección 12-3 (véase también la Fig. 6) dividida en un número arbitrario de N trozos. (a) ¿Cuál es la masa m_i de cada trozo? (b) Demuestre que la distancia de cada trozo al eje de rotación puede ser escrita así: $r_i = (i-1)L/N + (\frac{1}{2})L/N = (i - \frac{1}{2})L/N$. (c) Utilice la ecuación 5 para evaluar la inercia de rotación de esta barra, y demuestre que se reduce a la ecuación 6. Usted puede necesitar las sumas siguientes:

$$\sum_{i=1}^n 1 = n, \quad \sum_{i=1}^n i = n(n+1)/2, \\ \sum_{i=1}^n i^2 = n(n+1)(2n+1)/6.$$

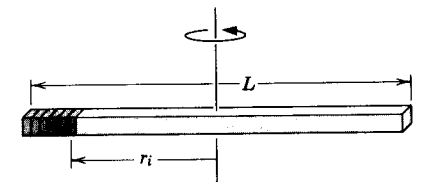


Figura 38 Problema 12.

- En este problema buscamos calcular la inercia de rotación de un disco de masa M y radio R en torno a un eje que pasa por su centro y es perpendicular a su superficie. Considere un elemento de masa dm en forma de anillo de radio r y anchura dr (véase la Fig. 39). (a) ¿Cuál es la masa dm de este elemento, expresada como una fracción de la masa total M del disco? (b) ¿Cuál es la inercia de rotación dI de este elemento? (c) Integre el resultado de la parte (b) para hallar la inercia de rotación de todo el disco.

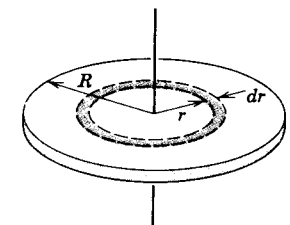


Figura 39 Problema 13.

- En este problema usamos el resultado del problema anterior de la inercia de rotación de un disco para calcular la inercia de rotación de una esfera sólida uniforme de masa M y radio R en torno a un eje que pase por su centro. Considérese un elemento dm de la esfera en forma de disco de espesor dz a una altura z sobre el centro (véase la Fig. 40). (a) Expresada como una fracción de la masa total M , ¿cuál es la masa dm del elemento? (b) Considerando al elemento como un disco, ¿cuál es su inercia de rotación dI ? (c) Integre el resultado de (b) sobre toda la esfera para hallar la inercia de rotación de la esfera.

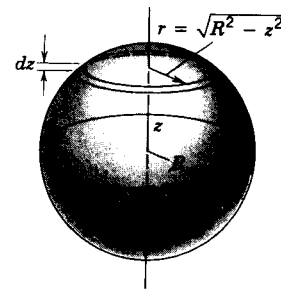


Figura 40 Problema 14.

Sección 12-4 Torca que actúa sobre una partícula

15. La figura 41 muestra las líneas de acción y los puntos de aplicación de dos fuerzas en torno al origen O . Imagine que estas fuerzas actúan sobre un cuerpo rígido pivotado en O , estando todos los vectores en el plano de la figura. (a) Halle una expresión para la magnitud de la torca resultante sobre el cuerpo. (b) Si $r_1 = 1.30$ m, $r_2 = 2.15$ m, $F_1 = 4.20$ N, $F_2 = 4.90$ N, $\theta_1 = 75.0^\circ$, y $\theta_2 = 58.0^\circ$, ¿cuáles son la magnitud y la dirección de la torca resultante?

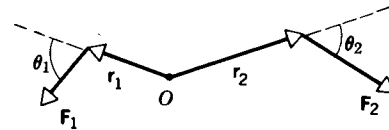


Figura 41 Problema 15.

16. Vuelva a trazar la figura 12 bajo las transformaciones siguientes: (a) $\mathbf{F} \rightarrow -\mathbf{F}$, (b) $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$, y (c) $\mathbf{F} \rightarrow -\mathbf{F}$ y $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$, mostrando en cada caso la nueva dirección de la torca. Compruebe si hay consistencia con la regla de la mano derecha.
17. El objeto que se muestra en la figura 42 está pivotado en O . Sobre él actúan tres fuerzas en las direcciones que se muestran en la figura: $F_A = 10$ N en el punto A , a 8.0 m de O ; $F_B = 16$ N en el punto B , a 4.0 m de O ; y $F_C = 19$ N en el punto C , a 3.0 m de O . ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la torca resultante con respecto a O ?

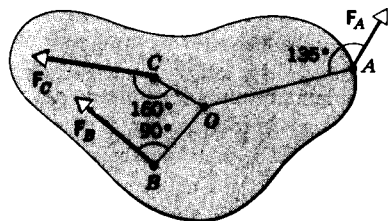


Figura 42 Problema 17.

18. (a) Dado que $\mathbf{r} = ix + jy + kz$ y $\mathbf{F} = iF_x + jF_y + kF_z$, halle la torca $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. (b) Demuestre que si $\mathbf{r}$ y $\mathbf{F}$ están en un

plano determinado, entonces $\boldsymbol{\tau}$ no tiene una componente en ese plano.

Sección 12-5 Dinámica de la rotación de un cuerpo rígido

19. Un cilindro que tiene una masa de 1.92 kg gira en torno a su eje de simetría. Se le aplican las fuerzas que se muestran en la figura 43: $F_1 = 5.88$ N, $F_2 = 4.13$ N, y $F_3 = 2.12$ N. También, $R_1 = 4.93$ cm y $R_2 = 11.8$ cm. Halle la magnitud y la dirección de la aceleración angular del cilindro.

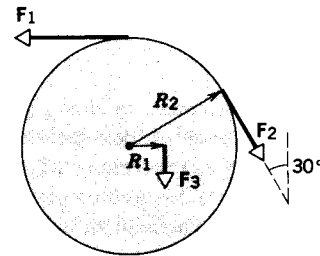


Figura 43 Problema 19.

20. Un cascarón esférico tiene un radio de 1.88 m. La aplicación de una torca de 960 N · m le imparte una aceleración angular igual a 6.23 rad/s² en torno a un eje que pasa por el centro del cascarón. Calcule (a) la inercia de rotación del cascarón en torno al eje de rotación y (b) la masa del cascarón.
21. En el acto de saltar desde un trampolín, un clavadista cambió su velocidad angular de cero a 6.20 rad/s en 220 ms. La inercia de rotación del clavadista es de 12.0 kg · m². (a) Halle la aceleración angular durante el salto. (b) ¿Qué torca externa actuó sobre el clavadista durante el salto?
22. El motor de un automóvil desarrolla 133 hp (= 99.18 kW) cuando gira a 1820 rev/min. ¿Cuál es la torca desarrollada?
23. Una rueda de 31.4 kg y un radio de 1.21 m está girando a razón de 283 rev/min. Debe ser detenida en 14.8 s. Halle la potencia promedio requerida. Suponga que la rueda es un aro delgado.
24. Si en la figura 18a $R = 12.3$ cm, $M = 396$ g, y $m = 48.7$ g, halle la velocidad del bloque después de que descendió 54.0 cm comenzando desde el reposo. Resuelva el problema usando los principios de conservación de la energía.
25. Suponga que la Tierra es una esfera de densidad uniforme. (a) Calcule su energía cinética de rotación. (b) Suponga que esta energía puede ser aprovechada para nuestro uso. ¿Durante cuánto tiempo podría la Tierra suministrar 1.00 kW de potencia a cada uno de los 4.20×10^9 habitantes de la Tierra?
26. La figura 44 muestra una puerta blindada de gran masa en la instalación para probar neutrones del Lawrence Livermore Laboratory; ésta es la puerta de bisagras más pesada del mundo. La puerta tiene una masa de 44,000 kg, una inercia de rotación en torno a la línea de sus bisagras de 8.7×10^4 kg · m², y una anchura de 2.4 m. ¿Qué fuerza uniforme, aplicada en el borde exterior en ángulo recto

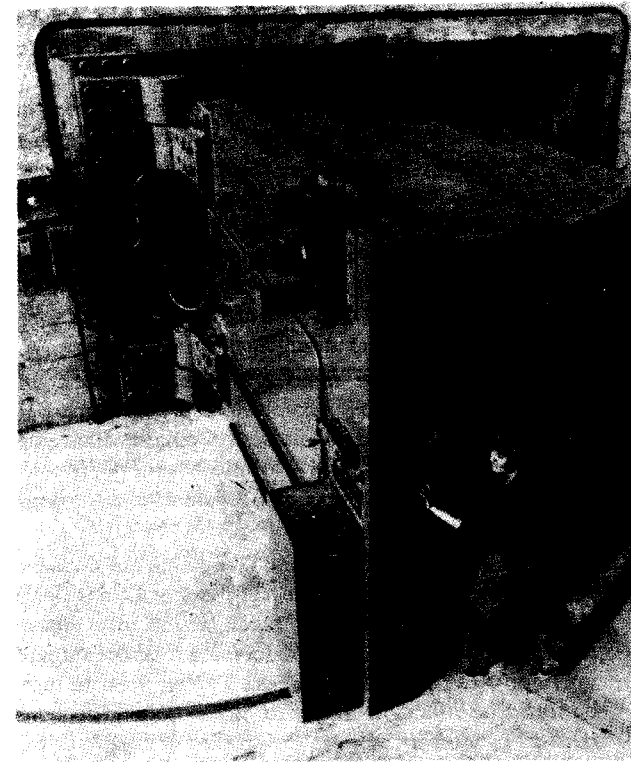


Figura 44 Problema 26.

- con la puerta, puede moverla desde el reposo en un ángulo de 90° en 30 s?
27. Sobre una polea que tiene una inercia de rotación de 1.14×10^{-3} kg · m² y un radio de 9.88 cm actúa una fuerza, aplicada tangencialmente a su borde, que varía en el tiempo según $F = 0.496t + 0.305t^2$, donde F está en newtons y t está en segundos. Si la polea estaba inicialmente en reposo, halle su velocidad angular 3.60 s después.
28. La figura 45 muestra dos bloques, cada uno de masa m , suspendidos de los extremos de una barra rígida carente de peso de longitud $L_1 + L_2$, siendo $L_1 = 20.0$ cm y $L_2 = 80.0$ cm. La barra es sostenida en posición horizontal como se muestra en la figura y luego se deja caer. Calcule las aceleraciones lineales de los dos bloques cuando comienzan a moverse.

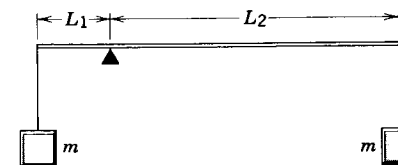


Figura 45 Problema 28.

29. Dos bloques idénticos, cada uno de masa M , están unidos por un cordón que pasa sobre una polea sin fricción de radio R y de inercia de rotación I (Fig. 46). El cordón no se desliza sobre la polea, y no se sabe si existe o no existe

fricción entre el plano y el bloque al deslizarse. Cuando este sistema se deja caer, se halla que la polea gira a través de un ángulo θ en el tiempo t y que la aceleración de los bloques es constante. (a) ¿Cuál es la aceleración angular de la polea? (b) ¿Cuál es la aceleración de los dos bloques? (c) ¿Cuáles son las tensiones en las secciones superior e inferior del cordón? Todas las respuestas deben expresarse en términos de M , I , R , θ , g , y t .

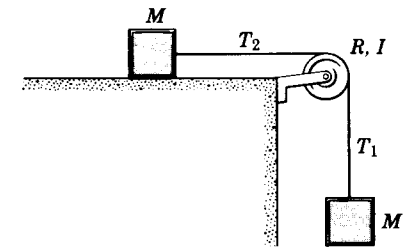


Figura 46 Problema 29.

30. Una rueda de masa M y radio de giro k (véase el problema 11) gira sobre un eje horizontal fijo que pasa por su cubo. Supóngase que el cubo roce al eje de radio a solamente en el punto más alto, siendo μ_k el coeficiente de fricción cinética. Se le da a la rueda una velocidad angular inicial ω_0 . Suponga una deceleración uniforme y halle (a) el tiempo transcurrido y (b) el número de revoluciones antes de que la rueda se detenga por completo.
31. En una máquina Atwood un bloque tiene una masa de 512 g y el otro una masa de 463 g. La polea, que está montada en chumaceras horizontales sin fricción, tiene un radio de 4.90 cm. Cuando es liberada a partir del reposo, se observa que el bloque más pesado cae 76.5 cm en 5.11 s. Calcule la inercia de rotación de la polea.
32. Una rueda en forma de disco uniforme de 23.0 cm de radio y 1.40 kg de masa gira a razón de 840 rev/min en rodamientos sin fricción. Para detener a la rueda, se oprime la zapata de un freno contra el borde de la rueda con una fuerza de 130 N, dirigida radialmente. La rueda completa 2.80 revoluciones antes de detenerse. Halle el coeficiente de fricción entre la zapata del freno y la periferia de la rueda.
33. Una vara de 1.27 m de longitud se mantiene vertical con un extremo sobre el piso y luego se deja caer. Halle la velocidad del otro extremo cuando alcanza el suelo, suponiendo que el extremo del suelo no se desliza.
34. Una esfera hueca, uniforme, gira en torno a un eje vertical en chumaceras sin fricción (Fig. 47). Un cordón delgado pasa alrededor del ecuador de la esfera, sobre una polea, y está unido a un objeto pequeño que, por otra parte, está libre de caer bajo la influencia de la gravedad. ¿Cuál es la velocidad del objeto después de que ha caído una distancia h desde el reposo?
35. Una barra uniforme de acero de 1.20 m de longitud y 6.40 kg de masa tiene unida en cada extremo una pequeña bola de 1.06 kg de masa. La barra está obligada a girar en un plano horizontal con respecto a un eje vertical que pasa

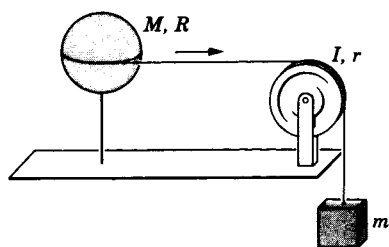


Figura 47 Problema 34.

por su punto medio. En cierto momento se observa que está girando a una velocidad angular de 39.0 rev/s. Debido a la fricción del eje, llega al reposo 32.0 s más tarde. Calcule, suponiendo una torca por fricción constante, (a) la aceleración angular, (b) la torca retardante ejercida por la fricción del eje, (c) la energía disipada por la fricción del eje, y (d) el número de revoluciones ejecutadas durante los 32.0 s. (e) Supóngase ahora que se sabe que la torca por fricción no es constante. ¿Cuál, si hay alguna, de las cantidades (a), (b), (c), o (d) puede calcularse sin requerir ninguna información adicional? Si hay alguna cantidad, dé su valor.

36. Un cuerpo rígido está hecho de tres varillas idénticas aseguradas entre sí en forma de letra H (Fig. 48). El cuerpo está libre de girar en torno a un eje horizontal que pasa por una de las piernas de la H. Se permite que el cuerpo caiga partiendo del reposo desde una posición en que el plano de la H es horizontal. ¿Cuál es la velocidad angular del cuerpo cuando el plano de la H es vertical?

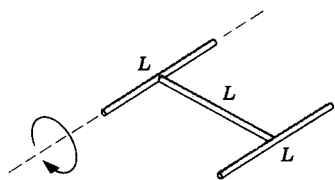


Figura 48 Problema 36.

37. La pala del rotor de un helicóptero tiene una longitud de 7.80 m y una masa de 110 kg. (a) ¿Qué fuerza se ejerce sobre el perno que une a la pala con el eje del rotor cuando éste está girando a razón de 320 rev/min? (Sugerencia: Para este cálculo puede considerarse que la pala es una masa puntual situada en el centro de masa. ¿Por qué?) (b) Calcule la torca que debe ser aplicada al rotor para llevarlo a una velocidad plena desde el reposo en 6.70 s. Ignore la resistencia del aire. (Para este cálculo no puede considerarse que la pala sea una masa puntual. ¿Por qué no? Suponga la distribución de una barra uniforme.)
38. Una chimenea alta se rompe cerca de su base y cae. Exprese (a) la aceleración lineal radial y (b) la aceleración lineal tangencial de la parte superior de la chimenea en función del ángulo θ formado por la chimenea con la vertical. (c) ¿Puede exceder de g la aceleración lineal resultante? (d) La chimenea se rompe durante la caída.

Explique cómo puede suceder esto. (Véase "More on the Falling Chimney", por Albert A. Bartlett, *The Physics Teacher*, septiembre de 1976, pág 351).

39. La longitud del día aumenta alrededor de 1 ms/siglo. Esto se debe primordialmente a las fuerzas de fricción generadas por el movimiento del agua en los mares de poca profundidad del mundo en respuesta a las fuerzas de la marea ejercidas por el Sol y la Luna. (a) ¿En qué cantidad está perdiendo energía cinética de rotación la Tierra? (b) ¿Cuál es la aceleración angular? (c) ¿Qué fuerza tangencial, en las latitudes 60° N y 60° S, ejercen los mares sobre el lecho marino cercano a las costas?
40. Un disco uniforme de radio R y masa M gira a una velocidad angular ω_0 . Está colocado sobre una superficie horizontal plana; el coeficiente de fricción cinética entre el disco y la superficie es μ_k . (a) Halle la torca por fricción sobre el disco. (b) ¿Cuánto tiempo le tomará al disco llegar al reposo?
41. Un automóvil está equipado con un volante que conserva la energía el cual, en operación, está engranado a la flecha motriz de modo tal que gira a razón de 237 rev/s cuando el automóvil viaja a 86.5 km/h. La masa total del automóvil es de 822 kg, el volante pesa 194 N, y es un disco uniforme de 1.08 m de diámetro. El automóvil desciende por una pendiente de 5.00° , de 1500 m de longitud, partiendo del reposo, con el volante embragado y sin que el motor proporcione potencia alguna. Despreciando la fricción y la inercia de rotación de las ruedas, halle (a) la velocidad del automóvil en el pie de la pendiente, (b) la aceleración angular del volante en el pie de la pendiente, y (c) la potencia absorbida por la rotación del volante en el pie de la pendiente.

Sección 12-6 Movimientos de rotación y de traslación combinados

42. Una esfera sólida de 4.72 cm de radio rueda hacia arriba por un plano inclinado a un ángulo de 34.0° . En el fondo del plano inclinado el centro de masa de la esfera tiene una velocidad de traslación de 5.18 m/s. (a) ¿Qué distancia recorrerá la esfera por el plano hacia arriba? (b) ¿Cuánto tiempo le toma regresar al pie del plano? (c) ¿Cuántas rotaciones completa la esfera durante el viaje completo?
43. Un aro que rueda por un plano inclinado con un ángulo de inclinación θ marcha al parejo con un bloque que se desliza por el mismo plano. Demuestre que el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano está dado por $\mu_k = \frac{1}{2} \tan \theta$.
44. Un aro de 3.16 m de radio tiene una masa de 137 kg. Rueda a lo largo de un piso horizontal de modo que su centro de masa tiene una velocidad de 0.153 m/s. ¿Cuánto trabajo debe realizarse sobre el aro para detenerlo?
45. Un automóvil que viaja a 78.3 km/h tiene llantas de 77.0 cm de diámetro. (a) ¿Cuál es la velocidad angular de las llantas con respecto al eje? (b) Si el automóvil se detiene uniformemente en 28.6 vueltas de las llantas (sin patinar), ¿cuál será la aceleración angular de las ruedas? (c) ¿Cuánto avanza el automóvil durante este periodo de frenado?

46. Un automóvil de 1040 kg tiene cuatro ruedas de 11.3 kg. ¿Qué fracción de la energía cinética total del automóvil se debe a la rotación de las ruedas en torno a sus ejes? Suponga que las ruedas tienen la misma inercia de rotación que los discos de la misma masa y tamaño. Explique por qué no se necesita conocer el radio de las ruedas.
47. Un yoyo (véase el problema 7) tiene una inercia de rotación de $950 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$ y una masa de 120 g. El radio de su eje tiene 3.20 mm y su cordón tiene 134 cm de longitud. El yoyo rueda desde el reposo hacia abajo hasta el extremo del cordón. (a) ¿Cuál es su aceleración? (b) ¿Cuánto tiempo le toma llegar al final del cordón? (c) Si el yoyo se queda estancado en el extremo del cordón en un movimiento giratorio puro, ¿cuál es su velocidad angular, en rev/s? (d) Repita (c), pero esta vez suponga que el yoyo se lanza hacia abajo con una velocidad inicial de 1.30 m/s.
48. Una esfera uniforme rueda por un plano inclinado. (a) ¿Cuál debe ser el ángulo de inclinación si la aceleración lineal del centro de la esfera ha de ser de $0.133g$? (b) Para este ángulo, ¿cuál sería la aceleración de un bloque sin fricción que se deslizará por el plano inclinado?
49. Una esfera homogénea arranca desde el reposo en el extremo superior de la pista que aparece en la figura 49 y rueda sin deslizarse hasta que se sale por el extremo de la derecha. Si $H = 60 \text{ m}$ y $h = 20 \text{ m}$ y la pista es horizontal en el extremo de la derecha, determine la distancia a la derecha del punto A a la que la bola golpea la línea horizontal de base.

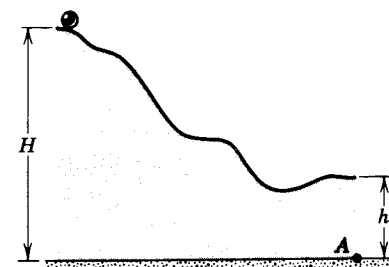


Figura 49 Problema 49.

50. Una canica sólida pequeña de masa m y radio r rueda sin deslizamiento a lo largo de la pista en rizo que se muestra en la figura 50, habiendo sido liberada desde el reposo en algún punto de la sección recta de la pista. (a) ¿Desde qué altura mínima desde el fondo de la pista deberá soltarse la canica con el fin de que se quede en la pista en la parte superior del rizo? (El radio del rizo es R ; suponga que $R \gg r$). (b) Si la canica se suelta desde una altura de $6R$ medida desde el fondo de la pista, ¿cuál es la componente horizontal de la fuerza que actúa sobre ella en el punto Q?
51. Un cilindro sólido de longitud L y radio R tiene un peso W . Alrededor del cilindro están enrolladas dos cuerdas, cada una de ellas cerca de cada extremo, y los extremos de las cuerdas están unidos a ganchos en el techo. El cilindro se mantiene horizontalmente con las dos cuerdas exactamente verticales y luego se deja caer (Fig. 51). Halle (a) la tensión en cada cuerda cuando se desenrollan y (b) la aceleración lineal del cilindro cuando cae.

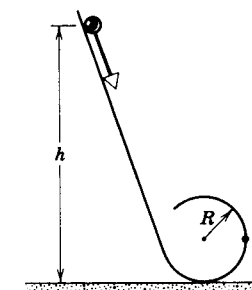


Figura 50 Problema 50.

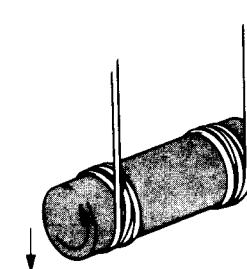


Figura 51 Problema 51.

52. Una longitud L de cinta flexible está enrollada firmemente. Luego se deja que se desenrolle mientras rueda por una pendiente inclinada que forma un ángulo θ con la horizontal, estando clavado el extremo superior de la cinta (Fig. 52). Demuestre que la cinta se desenrolla completamente en un tiempo $T = \sqrt{3L/g \sin \theta}$.

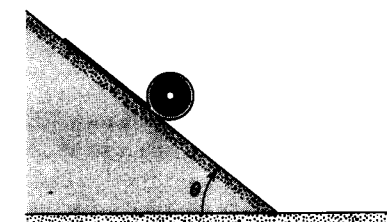


Figura 52 Problema 52.

53. Demuestre que un cilindro se deslizará por un plano inclinado de ángulo de inclinación θ si el coeficiente de fricción estática entre el plano y el cilindro es menor de $\frac{1}{3} \tan \theta$.
54. Un cuerpo rueda horizontalmente sin deslizamiento con una velocidad v . Luego rueda hacia arriba en un montículo hasta una altura máxima h . Si $h = 3v^2/4g$, ¿qué cuerpo puede ser?
55. Un disco uniforme, de masa M y radio R , está sobre un lado inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal carente de fricción. Luego se aplica una fuerza constante F tangencialmente en su perímetro por medio de un cordón enrollado alrededor de su borde. Describa el

movimiento (de rotación o de traslación) posterior del disco.

56. Un aparato para probar la resistencia al patinazo de llantas de automóvil está construido como se muestra en la figura 53. Inicialmente la llanta no tiene movimiento y está sujeta a un bastidor ligero que pivotea libremente en los puntos A y B . La inercia de rotación de la rueda en torno a su eje es de $0.750 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, su masa es de 15.0 kg , y su radio es de 30.0 cm . La llanta está situada sobre la superficie de una banda transportadora que se mueve a una velocidad superficial de 12.0 m/s , de modo que AB es horizontal. (a) Si el coeficiente de fricción cinética entre la llanta y la banda transportadora es de 0.600 , ¿qué tiempo necesitará la rueda para alcanzar su velocidad angular final? (b) ¿Cuál será la longitud de la señal que deje el patinazo sobre la superficie del transportador?

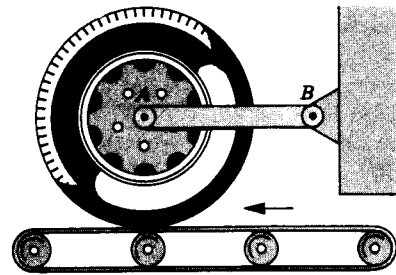


Figura 53 Problema 56.

57. Un cilindro sólido de 10.4 cm de radio y 11.8 kg de masa arranca desde el reposo y rueda sin deslizarse una distancia de 6.12 m por el techo de una casa, el cual tiene una inclinación de 27.0° . (a) ¿Cuál es la velocidad angular del cilindro en torno a su centro al abandonar el techo de la casa? (b) La pared exterior de la casa tiene 5.16 m de altura. ¿A qué distancia de la pared golpea el cilindro el nivel del suelo? Véase la figura 54.
58. Un cilindro sólido de 23.4 kg de masa y 7.60 cm de radio tiene una cinta delgada enrollada a su alrededor. La cinta pasa sobre una polea ligera sin fricción hasta un objeto de 4.48 kg de masa, que cuelga verticalmente (véase la Fig. 55). El plano sobre el que se mueve el cilindro está inclinado a 28.3° sobre la horizontal. Halle (a) la aceleración lineal del cilindro al rodar por el plano inclinado y (b) la tensión en la cinta, suponiendo que no hay deslizamiento.

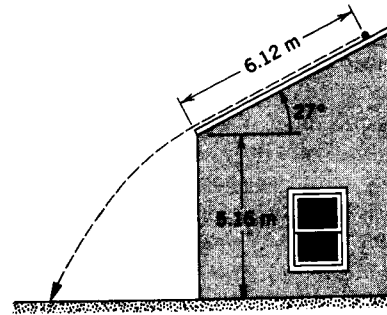


Figura 54 Problema 57.

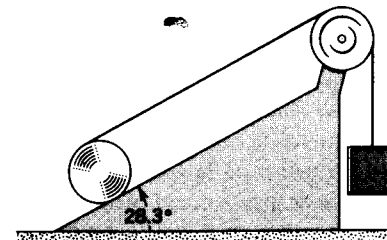


Figura 55 Problema 58.

59. Una estudiante arroja una regla de longitud L hacia arriba en el aire. En el momento en que la regla abandona su mano la velocidad del extremo más cercano de la regla es cero. Ésta completa N vueltas hasta que es atrapada por la estudiante en el punto de liberación inicial. Demuestre que la altura h a la que se elevó el centro de masa es $h = \pi N L / 4$.
60. Una bola de billar es golpeada por un taco como se aprecia en la figura 56. La línea de acción del impulso aplicado es horizontal y pasa por el centro de la bola. La velocidad inicial v_0 de la bola, su radio R , su masa M , y el coeficiente de fricción μ_k entre la bola y la mesa son todos conocidos. ¿Qué tan lejos se moverá la bola antes de que cese su deslizamiento sobre la mesa?



Figura 56 Problema 60.

CAPÍTULO 13

ÍMPETU ANGULAR

En el capítulo 12 hemos estudiado la dinámica del movimiento de rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo en un marco de referencia inercial. Hemos visto que la relación escalar $\Sigma \tau = I\alpha$, en la que sólo se consideraban las componentes de la torca externa a lo largo del eje de rotación, era suficiente para resolver los problemas dinámicos en este caso especial.

En este capítulo continuamos este análisis y lo extendemos a situaciones en las que el eje de rotación puede no estar fijo en un marco de referencia inercial. Para resolver estos problemas dinámicos desarrollamos y empleamos una relación vectorial para el movimiento de rotación, que es análoga a la forma vectorial de la segunda ley de Newton, $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$. Presentamos también el ímpetu angular y demostramos su importancia como una propiedad dinámica de las rotaciones.

Finalmente, demostramos que, en sistemas en los que no actúa una torca externa neta, puede aplicarse la importante ley de la conservación del ímpetu angular.

13-1 ÍMPETU ANGULAR DE UNA PARTÍCULA

Hemos visto que el *ímpetu lineal* es útil en los casos que interviene el movimiento de traslación de partículas aisladas o de sistemas de partículas, incluyendo a los cuerpos rígidos. Por ejemplo, el ímpetu lineal se conserva en las colisiones. Para una partícula aislada el ímpetu lineal es $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ (Ec. 19 del capítulo 9); para un sistema de partículas es $\mathbf{P} = M\mathbf{v}_{\text{cm}}$ (Ec. 25 del capítulo 9), en donde M es la masa total del sistema y $\mathbf{v}_{\text{cm}}$ es la velocidad del centro de masa. En el movimiento de rotación, el análogo del ímpetu lineal se llama *ímpetu angular*, que definimos a continuación para el caso especial de una partícula aislada. Posteriormente, ampliamos la definición para incluir sistemas de partículas, y demostramos que el ímpetu angular es un concepto tan útil en el movimiento de rotación como lo es el ímpetu lineal en el movimiento de traslación.

Consideremos una partícula de masa m e ímpetu lineal $\mathbf{p}$ en una posición $\mathbf{r}$ respecto al origen O de un marco de referencia inercial; para mayor conveniencia (véase la Fig. 1) hemos elegido que el plano xy sea el plano definido

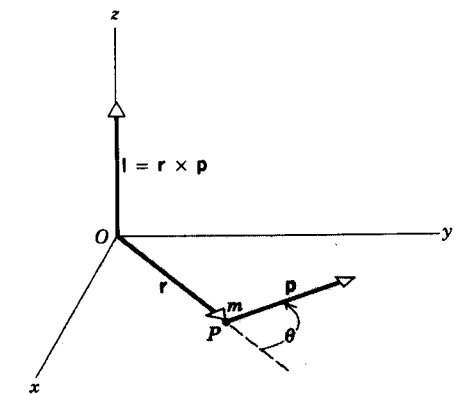


Figura 1 Una partícula de masa m , localizada en el punto P por el vector de posición $\mathbf{r}$, tiene un ímpetu lineal $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. (Para mayor simplificación se supone que tanto $\mathbf{r}$ como $\mathbf{p}$ están en el plano xy .) Respecto al origen O , la partícula tiene un ímpetu angular de $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, paralelo al eje z en este caso.

por los vectores $\mathbf{p}$ y $\mathbf{r}$. Definimos que el *ímpetu angular* $\mathbf{l}$ de la partícula *respecto al origen* O sea

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}. \quad (1)$$

Nótese que debemos especificar el origen O con objeto de definir al vector de posición $\mathbf{r}$ en la definición del ímpetu angular.

El ímpetu angular es un vector. Su magnitud está dada por

$$l = rp \sin \theta. \quad (2)$$

donde θ es el ángulo más pequeño entre $\mathbf{r}$ y $\mathbf{p}$ y su dirección es normal al plano formado por $\mathbf{r}$ y $\mathbf{p}$. El sentido está dado por la regla de la mano derecha: hágase girar a $\mathbf{r}$ sobre $\mathbf{p}$, en el ángulo más pequeño entre ellos, con los dedos de la mano derecha doblados; el pulgar derecho extendido apunta entonces en la dirección de $\mathbf{l}$ (paralela al eje z en la Fig. 1).

También podemos escribir la magnitud de l ya sea como

$$l = (r \sin \theta) p = pr_{\perp}, \quad (3a)$$

o como

$$l = r(p \sin \theta) = rp_{\perp}, \quad (3b)$$

donde $r_{\perp} (= r \sin \theta)$ es la componente de $\mathbf{r}$ en ángulo recto con la línea de acción de $\mathbf{p}$, y $p_{\perp} (= p \sin \theta)$ es la componente de $\mathbf{p}$ en ángulo recto con $\mathbf{r}$. La ecuación 3b muestra que sólo la componente de $\mathbf{p}$ perpendicular a $\mathbf{r}$ contribuye al ímpetu angular. Cuando el ángulo θ entre $\mathbf{r}$ y $\mathbf{p}$ es 0° ó 180° , no existe una componente perpendicular ($p_{\perp} = p \sin \theta = 0$); entonces la línea de acción de $\mathbf{p}$ pasa por el origen, y $r_{\perp}$ es también cero. En este caso ambas ecuaciones 3a y 3b muestran que el ímpetu angular l es cero.

Derivaremos ahora una relación importante entre la torca y el ímpetu angular para una sola partícula. Primero diferenciamos a la ecuación 1 y obtenemos

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}). \quad (4)$$

La derivada de un producto vectorial se considera de la misma manera que la derivada de un producto ordinario, excepto que no debemos cambiar el orden de los términos. Tenemos

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

Pero $d\mathbf{r}/dt$ es la velocidad instantánea $\mathbf{v}$ de la partícula, y $\mathbf{p}$ es igual a $m\mathbf{v}$. Haciendo estas sustituciones en el primer producto de la derecha, obtenemos

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = (\mathbf{v} \times m\mathbf{v}) + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (5)$$

Ahora $\mathbf{v} \times m\mathbf{v} = 0$, porque el producto vectorial de dos vectores paralelos es cero. Reemplazando a $d\mathbf{p}/dt$ en el

segundo producto por la fuerza neta $\Sigma \mathbf{F}$ que actúa sobre la partícula, tenemos

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{r} \times \Sigma \mathbf{F}.$$

El lado derecho de esta ecuación es precisamente la torca neta $\Sigma \boldsymbol{\tau}$. Por lo tanto, obtenemos

$$\Sigma \boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{l}}{dt}, \quad (6)$$

que afirma que *la torca neta que actúa sobre una partícula es igual a la razón de cambio con respecto al tiempo de ímpetu angular*. En esta ecuación, tanto la torca $\boldsymbol{\tau}$ como el ímpetu angular $\mathbf{l}$ deben definirse con respecto al mismo origen. La ecuación 6 es el análogo de rotación de la ecuación 20 del capítulo 9, $\Sigma \mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$, que establece que la *fuerza neta* que actúa sobre una partícula es igual a la razón de cambio con respecto al tiempo de su ímpetu lineal.

La ecuación 6, como todas las ecuaciones vectoriales, es equivalente a tres ecuaciones escalares, a saber,

$$\Sigma \tau_x = \frac{dl_x}{dt}, \quad \Sigma \tau_y = \frac{dl_y}{dt}, \quad \Sigma \tau_z = \frac{dl_z}{dt}. \quad (7)$$

Por lo tanto, la componente x de la torca externa neta está dada por el cambio con el tiempo de la componente x del ímpetu angular. Se obtienen resultados similares para las direcciones y y z .

Problema muestra 1 Una partícula de masa m se libera desde el reposo en el punto P de la figura 2, cayendo paralela al eje y (vertical). (a) Halle la torca que actúa sobre m en cualquier tiempo t , con respecto al origen O . (b) Halle el ímpetu angular de m en cualquier tiempo t , con respecto a este mismo origen. (c) Demuestre que la relación $\Sigma \boldsymbol{\tau} = d\mathbf{l}/dt$ (Ec. 6) da un resultado correcto cuando se aplica a este conocido problema.

Solución (a) La torca está dada por $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, y su magnitud es

$$\tau = rF \sin \theta.$$

En este ejemplo $r \sin \theta = b$ y $F = mg$, de modo que

$$\tau = mgb = \text{una constante.}$$

Nótese que la torca es simplemente el producto de la fuerza mg por el brazo de momento b . La regla de la mano derecha muestra que $\boldsymbol{\tau}$ está dirigida perpendicularmente en la figura.

(b) El ímpetu angular está dado por la ecuación 1, $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Su magnitud es, de la ecuación 2,

$$l = rp \sin \theta.$$

En este ejemplo $r \sin \theta = b$ y $p = mv = m(gt)$, de modo que

$$l = mgbt.$$

La regla de la mano derecha muestra que $\mathbf{l}$ está dirigido perpendicularmente en la figura, lo que significa que $\mathbf{l}$ y $\boldsymbol{\tau}$ son vectores

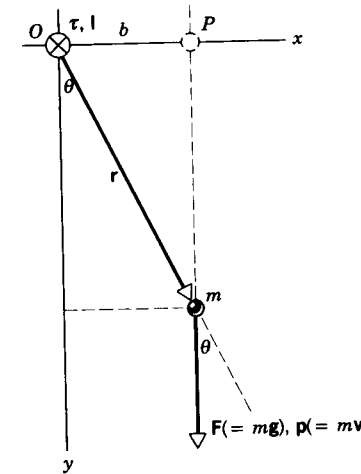


Figura 2 Problema muestra 1. Una partícula de masa m cae verticalmente desde el punto P . La torca $\boldsymbol{\tau}$ y el ímpetu angular $\mathbf{l}$ con respecto al origen O están dirigidos perpendicularmente en la figura, como se indica con el símbolo $\otimes$ en el punto O .

paralelos. El vector $\mathbf{l}$ cambia con el tiempo de magnitud solamente, su dirección permanece siempre la misma en este caso.

(c) Escribiendo la ecuación 6 en términos de magnitudes, tenemos

$$\tau = \frac{dl}{dt}.$$

Sustituyendo la expresión para τ y l de (a) y (b) tenemos que

$$mgb = \frac{d}{dt} (mgbt) = mgb,$$

la cual es una identidad. Entonces la relación $\tau = dl/dt$ rinde resultados correctos en este caso. En efecto, si cancelamos a la constante b de los primeros dos términos de arriba y sustituimos a gt por la cantidad equivalente v , tenemos

$$mg = \frac{d}{dt} (mv).$$

Puesto que $mg = F$ y $mv = p$, éste es el conocido resultado $F = dp/dt$. Entonces, como lo hemos indicado anteriormente, las relaciones como $\tau = dl/dt$, aunque a menudo se usan en forma generalizada, no son postulados básicos nuevos de la mecánica clásica sino más bien la reformulación de las leyes de Newton en el caso del movimiento de rotación.

Nótese que los valores de τ y de l dependen de nuestra elección del origen, esto es, de b . En particular, si $b = 0$, entonces $r = 0$ y $l = 0$.

13-2 SISTEMAS DE PARTÍCULAS

Hasta aquí hemos estudiado solamente partículas aisladas. Para calcular el ímpetu angular total $\mathbf{L}$ de un *sistema de partículas* con respecto a un punto dado, debemos sumar vectorialmente los ímpetus angulares de todas las partículas individuales en torno a este punto. Para un sistema que contenga N partículas, tenemos, entonces,

$$\mathbf{L} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \cdots + \mathbf{l}_N = \sum_{n=1}^N \mathbf{l}_n$$

donde la suma (vectorial) se ha tomado sobre todas las partículas del sistema.

A medida que el tiempo pasa, el ímpetu angular total $\mathbf{L}$ del sistema con respecto a un punto de referencia fijo (el cual elegimos, como en nuestra definición básica de $\mathbf{l}$ en la ecuación 1, que sea el origen de un marco de referencia inercial) puede cambiar. Esto es,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{l}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{l}_2}{dt} + \cdots = \sum_{n=1}^N \frac{d\mathbf{l}_n}{dt}.$$

Para cada partícula, $d\mathbf{l}_n/dt = \boldsymbol{\tau}_n$, y haciendo esta sustitución tenemos que

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \Sigma \boldsymbol{\tau}_n.$$

Es decir, la razón de cambio con respecto al tiempo del ímpetu angular *total* de un sistema de partículas, es igual a la torca neta que actúa sobre el sistema.

Entre las torcas que actúen sobre el sistema estarán (1) las torcas ejercidas sobre las partículas del sistema por fuerzas internas entre las partículas y (2) las torcas ejercidas sobre las partículas del sistema por fuerzas externas. Si la tercera ley de Newton se cumple en su llamada forma fuerte, esto es, si las fuerzas entre dos partículas cualesquiera no sólo son iguales y opuestas sino que también están dirigidas a lo largo de la línea que une a las dos partículas, entonces la torca interna total es cero porque la torca resultante de cada par de fuerzas acción-reacción internas es cero.

De aquí que la primera fuente, la torca a partir de las fuerzas internas, no contribuya al cambio en $\mathbf{L}$. Sólo permanece la segunda fuente (la torca a partir de las fuerzas externas), y podemos escribir

$$\Sigma \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}, \quad (8)$$

donde $\Sigma \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}}$ es la suma de las torcas *externas* que actúan sobre el sistema. Así, decimos que *la torca externa neta que actúa sobre un sistema de partículas es igual a la razón de cambio en el tiempo del ímpetu angular total del sistema*. La torca y el ímpetu angular deben calcularse con respecto al mismo origen de un marco de referencia inercial. En situaciones en las que no es probable que surja una confusión, evitamos el subíndice de $\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}}$ para mayor conveniencia.

La ecuación 8 es la generalización de la ecuación 6 a muchas partículas. Se cumple tanto si las partículas que forman el sistema están en movimiento unas respecto a las otras o si tienen relaciones espaciales fijas, como en un cuerpo rígido.

La ecuación 8 es la analogía de rotación de la ecuación 27 del capítulo 9, $\Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}} = d\mathbf{P}/dt$, que nos dice que para un

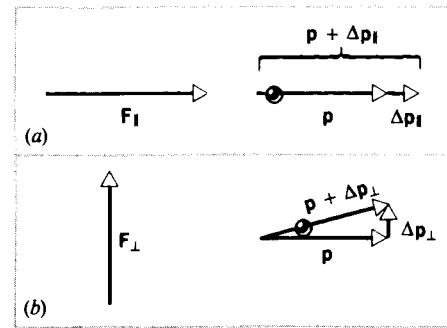


Figura 3 (a) Cuando una componente de una fuerza $F_{\parallel}$ actúa paralelamente al ímpetu lineal p de una partícula, el ímpetu lineal cambia en $\Delta p_{\parallel}$, el cual es paralelo a p . (b) Cuando una componente de una fuerza $F_{\perp}$ actúa perpendicularmente al ímpetu lineal p de una partícula, el ímpetu lineal cambia en $\Delta p_{\perp}$, el cual es perpendicular a p . La partícula se mueve ahora en la dirección de la suma vectorial $p + \Delta p_{\perp}$.

sistema de partículas (cuerpo rígido o no) la fuerza externa neta que actúa sobre el sistema es igual a la razón de cambio en el tiempo de su ímpetu lineal total.

Extendamos más allá la analogía entre el modo en que una fuerza cambia el ímpetu lineal y el modo en que una torca cambia el ímpetu angular. Supongamos que una fuerza F actúa sobre una partícula que se mueve con ímpetu lineal p . Podemos resolver a F en dos componentes, como se muestra en la figura 3: una componente ($F_{\parallel}$) es paralela a la dirección (instantánea) de p y otra ($F_{\perp}$) es perpendicular a p . En un intervalo de tiempo pequeño Δt , la fuerza produce un cambio en el ímpetu Δp , determinado de acuerdo con $F = \Delta p / \Delta t$. Así, Δp es paralelo a F . La componente $F_{\parallel}$ da un cambio en el ímpetu $\Delta p_{\parallel}$ paralelo a p , que se suma a p y cambia su magnitud pero no su dirección (véase la Fig. 3a). La componente perpendicular $F_{\perp}$, por otra parte, proporciona un incremento $\Delta p_{\perp}$ que cambia la dirección de p pero, cuando $\Delta p_{\perp}$ es pequeño comparado con p , deja a la magnitud de p sin alteración (véase la Fig. 3b). Un ejemplo de lo último es una partícula que se mueve en círculo a velocidad constante sujeta solamente a una fuerza centrípeta, la cual es siempre perpendicular a la velocidad tangencial.

El mismo análisis rige para la acción de una torca, como se muestra en la figura 4. En este caso, $\tau = \Delta L / \Delta t$, y ΔL debe ser paralelo a τ . Una vez más resolvemos a τ en dos componentes, $\tau_{\parallel}$ paralelo a L y $\tau_{\perp}$ perpendicular a L . La componente de τ paralela a L cambia de magnitud al ímpetu angular, pero no de dirección (Fig. 4a). La componente de τ perpendicular a L da un incremento $\Delta L_{\perp}$ perpendicular a L , que cambia la dirección de L pero no su magnitud (Fig. 4b). Esta última condición es responsable del movimiento de los trompos y de los giroscopios, como veremos en la sección 13-5. Al comparar las figuras

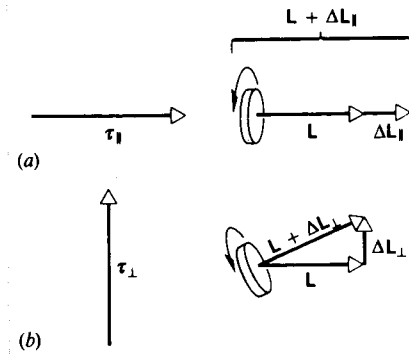


Figura 4 (a) Cuando la componente $\tau_{\parallel}$ de una torca actúa paralelamente al ímpetu angular L de un sistema, el ímpetu angular cambia en $\Delta L_{\parallel}$, el cual es paralelo a L . (b) Cuando una componente $\tau_{\perp}$ de una torca actúa perpendicularmente al ímpetu angular L de un sistema, el ímpetu angular cambia en $\Delta L_{\perp}$, el cual es perpendicular a L . El eje de rotación apunta ahora en la dirección que corresponde a la suma vectorial $L + \Delta L_{\perp}$.

3 y 4 podemos ver las semejanzas entre la dinámica de rotación y la dinámica de traslación.

Una comparación adicional entre los fenómenos lineal y de rotación es que *no se efectúa ningún trabajo* si (1) la fuerza actúa en ángulo recto con el ímpetu lineal (Fig. 3b), o (2) la torca actúa en ángulo recto con el ímpetu angular (Fig. 4b). En cada caso, el agente externo no provoca un cambio en la energía cinética, y el movimiento continúa con la misma velocidad lineal o de rotación.

En la figura 5 se muestra un ejemplo de la aplicación de la ecuación 8 a la dinámica de la rotación. En la figura 5a, un extremo del eje de una rueda de bicicleta que está girando descansa libremente sobre un poste, y el otro extremo está detenido por la mano de un estudiante. El estudiante empuja tangencialmente a la rueda en la llanta, con objeto de hacer que gire más rápidamente. Considerada con respecto al centro de la rueda, la torca ejercida por el estudiante es paralela al ímpetu angular de la rueda, apuntando ambos vectores (τ y L) hacia el estudiante. El resultado de esta torca es un aumento en el ímpetu angular de la rueda. En la figura 5b, el estudiante ha soltado un soporte del eje. Consideremos ahora las torcas respecto al punto de soporte que permanece. Existen dos fuerzas que actúan, una fuerza normal al punto de soporte, que no produce ninguna torca respecto a ese punto, y el peso de la rueda que actúa hacia abajo en el centro de masa. La torca respecto al punto O debido al peso es perpendicular a L , y su efecto es, por lo tanto, un cambio en la dirección de L , como en la figura 4b. Sin embargo, puesto que la dirección de L es también la dirección del eje,* el efecto

* Esto se cumple sólo si el eje de rotación es también un eje de simetría del cuerpo; véase la sección 13-3.

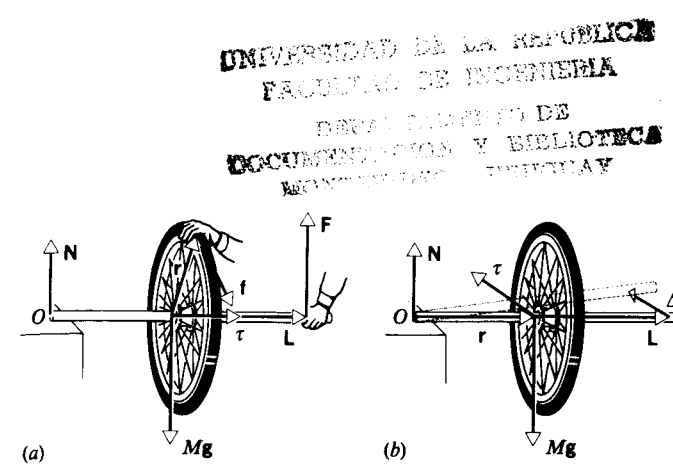


Figura 5 (a) Una fuerza tangencial f en la llanta de la rueda proporciona una torca τ (respecto al centro de la rueda) a lo largo del eje de rotación, aumentando la magnitud de la velocidad angular de la rueda pero dejando a su dirección sin alterar. (b) Cuando el extremo del eje se libera, la torca de la gravitación respecto al punto O apunta hacia el papel, esto es, perpendicularmente al eje de rotación, como en la figura 4b. Esta torca cambia la dirección del eje de rotación, y el eje de la rueda se mueve en el plano horizontal hacia la posición mostrada por la línea punteada.

de la fuerza de la gravedad (hacia abajo) es girar al eje hacia un lado. La rueda pivotará lateralmente respecto al punto de soporte. ¡Ensáyelo! (Si usted no tiene a la mano una rueda de bicicleta montada libremente, un giroscopio de juguete funciona de la misma manera.)

Como la hemos derivado, la ecuación 8 se cumple cuando τ y L se miden con respecto al origen de un marco de referencia inercial. Bien podríamos preguntarnos si se cumple todavía cuando medimos a estos dos vectores con respecto a un punto arbitrario (digamos, una partícula determinada) del sistema en movimiento. En general, tal punto se movería de manera complicada si el cuerpo o sistema de partículas se trasladara, se volteara y cambiara su configuración, y la ecuación 8 no se aplicaría a tal punto de referencia. Sin embargo, si se elige que el punto de referencia sea el centro de masa del sistema, aun cuando este punto pudiera estar acelerando en nuestro marco de referencia inercial, entonces la ecuación 8 sí se cumple. (Véase el problema 8.) Ésta es otra notable propiedad del centro de masa. Entonces podemos separar el movimiento general de un sistema de partículas en el movimiento de traslación de su centro de masa (Ec. 27 del capítulo 9) y un movimiento de rotación en torno a su centro de masa (Ec. 8).

13-3 ÍMPETU ANGULAR Y VELOCIDAD ANGULAR

Para presentar casos en los que sea absolutamente necesario considerar la naturaleza vectorial de la velocidad angular, de la torca, y del ímpetu angular, consideraremos primero un ejemplo sencillo del giro de una partícula que

ilustra un caso en que la velocidad angular y el ímpetu angular no son paralelos.

La figura 6a muestra una partícula aislada de masa m unida a un flecha rígida, sin masa por un brazo rígido, sin masa, de longitud r' perpendicular a la flecha. La partícula se mueve en un círculo de radio r' , y suponemos que lo hace con una velocidad constante v . Imaginemos que este experimento tiene lugar en una región de gravedad despreciable, de modo que no necesitemos considerar la fuerza de la gravedad que actúa sobre la partícula. La única fuerza que actúa sobre la partícula es la fuerza centrípeta ejercida por el brazo que une a la partícula con la flecha.

La flecha se halla confinada al eje z por dos chumaceras delgadas ideales (sin fricción). Hagamos que la chumacera inferior defina al origen O de nuestro sistema de coordenadas. La chumacera superior, como veremos, es necesaria para impedir que la flecha se tambalee con respecto al eje z , lo cual sucede cuando la velocidad angular no es paralela al ímpetu angular.

La velocidad angular ω de la partícula apunta hacia arriba a lo largo del eje z (o, de manera equivalente, paralelo a él) el eje z , como se muestra en la figura 6b. Esto es consistente con la relación vectorial $v = \omega \times r$ (Ec. 16 del capítulo 11). No importa dónde se elija el origen a lo largo del eje z , el vector de la velocidad angular será paralelo al eje. Su magnitud es, de manera similar, independiente de la ubicación del origen, siendo (a partir del producto cruz) $v/(r \sin \theta) = v/r'$.

El ímpetu angular l de la partícula con respecto al origen O del marco de referencia está dado por la ecuación 1, o sea,

$$l = r \times p,$$

donde r y $p (= mv)$ se muestran en la figura 6b. El vector l es perpendicular al plano formado por r y p , lo que significa que l no es paralelo a ω . Nótese (y véase la Fig. 6c) que l tiene una componente (vector) l_z que es paralela a ω , pero tiene otra componente (vector) $l_{\perp}$ que es perpendicular a ω . Éste es un caso en que nuestra analogía entre el movimiento lineal y circular no es válida: p es siempre paralelo a v , pero l no siempre es paralelo a ω . Si elegimos que nuestro origen esté en el plano de la partícula que describe el círculo, entonces l es paralelo a ω ; de otro modo, no lo será.

Consideremos ahora la relación entre l_z y ω para la partícula que está girando. De la figura 6c, en la que hemos trasladado a l al centro del círculo, obtenemos

$$l_z = l \sin \theta = r(mv) \sin \theta = r(mr'\omega) \sin \theta,$$

usando $v = r'\omega$. Sustituyendo por r' (el radio del círculo en el que se mueve la partícula) al producto $r \sin \theta$ nos da

$$l_z = mr'^2\omega. \quad (9)$$

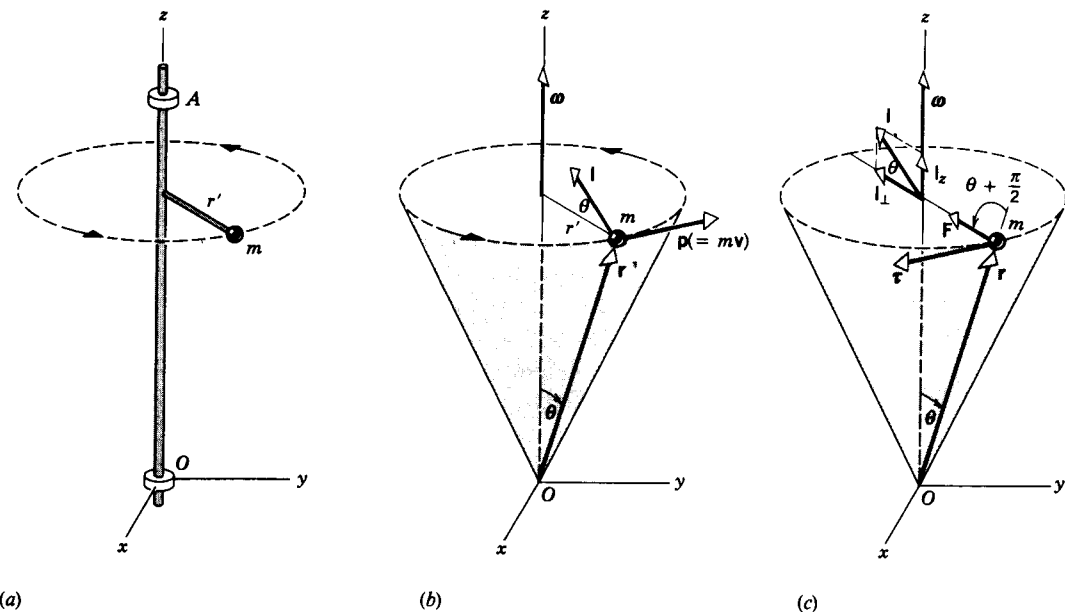


Figura 6 (a) Una partícula de masa m está unida por medio de un brazo de longitud r' a una flecha fijada por dos chumaceras (en O y A) para girar en torno al eje z . (b) La partícula gira a velocidad tangencial v en un círculo de radio r' alrededor del eje z (se omiten las barras y las chumaceras para simplificar la ilustración). Se muestra el impetu angular $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ con respecto al origen O . (c) Para que la partícula se mueva en círculo, deberá haber una fuerza centrípeta $\mathbf{F}$ que actúe como se muestra, dando por resultado una torca τ respecto a O . Por conveniencia, el vector $\mathbf{l}$ del momento angular y sus componentes a lo largo y perpendiculares a z se muestran en el centro del círculo.

Ahora mr'^2 es la inercia de rotación I de la partícula con respecto al eje z . Entonces

$$l_z = I\omega. \quad (10)$$

Nótese que la relación vectorial $\mathbf{l} = I\boldsymbol{\omega}$ (que es análoga a la relación lineal $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$) no es correcta en este caso, porque $\mathbf{l}$ y $\boldsymbol{\omega}$ no apuntan en la misma dirección.

¿En qué circunstancias apuntarán en la misma dirección el impetu y la velocidad angular? Para ilustrarlo, añadiremos otra partícula de la misma masa m al sistema, como se muestra en la figura 7, por medio de otro brazo unido a la flecha central de la figura 6a en el mismo sitio que el primer brazo pero apuntando en la dirección opuesta. La componente l_z debida a esta segunda partícula será igual y opuesta a la de la primera partícula, y los dos vectores $\mathbf{l}_1$ sumarán cero. Sin embargo, los dos vectores $\mathbf{l}_2$ apuntan en la misma dirección y se suman. Entonces, en este sistema de dos partículas el impetu angular total $\mathbf{L}$ es paralelo a $\boldsymbol{\omega}$.

Podemos ahora extender nuestro sistema a un cuerpo rígido, formado de muchas partículas. Si el cuerpo es simétrico respecto al eje de rotación, con lo cual queremos decir que para cada elemento de masa del cuerpo deberá haber un elemento de masa idéntico diametralmen-

te opuesto al primer elemento y a la misma distancia del eje de rotación, entonces el cuerpo puede ser visto como constituido por grupos de pares de partículas de la misma clase que hemos estado estudiando. Puesto que $\mathbf{L}$ y $\boldsymbol{\omega}$ son paralelos para todos estos pares, serán también paralelos para cuerpos rígidos que posean esta clase de simetría, que recibe el nombre de simetría *axial*.

Para tales cuerpos rígidos simétricos $\mathbf{L}$ y $\boldsymbol{\omega}$ son paralelos y pueden ser escritos en forma vectorial

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}. \quad (11)$$

Sin embargo, no olvidemos que si $\mathbf{L}$ representa al impetu angular *total*, entonces la ecuación 11 se aplica *únicamente* a cuerpos que sean simétricos con respecto al eje de rotación. Si $\mathbf{L}$ representa a la componente del vector del impetu angular a lo largo del eje de rotación (esto es, a L_z), entonces la ecuación 11 se cumple para *cualquier* cuerpo rígido, simétrico o no, que gire con respecto a un eje fijo.

En cuerpos simétricos (tales como el sistema de dos partículas de la figura 7), puede ser retirada la chumacera superior de la figura 6a, y la flecha permanecerá paralela al eje z . Podemos verificar esto observando lo fácil que es hacer girar sobre un eje a un objeto simétrico tal como un trompo o una pequeña rueda abrasiva mantenidos sola-

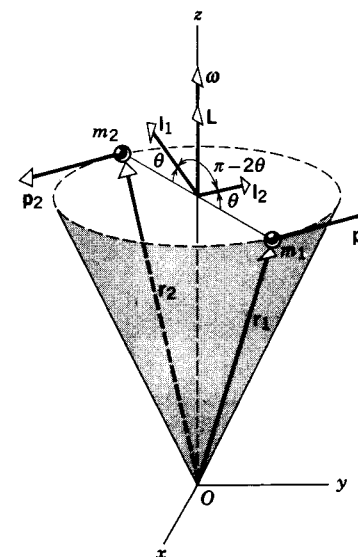


Figura 7 Dos partículas de masa m girando como en la figura 6, pero en los extremos opuestos de un diámetro. El momento angular total $\mathbf{L}$ de las dos partículas es, en este caso, paralelo a la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$.

mente entre el pulgar y el índice de una mano. Cualquier pequeña asimetría del objeto requiere un segundo apoyo que mantenga a la flecha en una dirección fija; la chumacera debe ejercer una torca sobre la flecha, la cual se bambolea al girar el objeto, como veremos al final de esta sección. Esto es particularmente serio para objetos que giran a altas velocidades, tales como los rotores de turbina. Aunque diseñados para ser simétricos, tales rotores, debido a pequeños errores de colocación de los álabes, por ejemplo, pueden ser ligeramente asimétricos. Pueden recuperar a la simetría por la adición o eliminación de metal en los lugares apropiados; esto se lleva a cabo haciendo girar a la rueda en un aparato especial de modo que el tambaleo pueda ser medido cuantitativamente, a la vez que calculada y automáticamente indicada la medida correctiva necesaria. De manera parecida, en los rines de las llantas de los automóviles se colocan pesas de plomo en puntos estratégicos para reducir el bamboleo a altas velocidades. Para “balancear” una rueda de automóvil, el mecánico busca precisamente que los vectores del impetu angular y de la velocidad angular de la rueda sean paralelos, reduciendo así el esfuerzo sobre los baleros de las ruedas.

Problema muestra 2 ¿Cuál es mayor, el impetu angular de la Tierra asociado con su rotación sobre su eje o el impetu angular de la Tierra asociado con su movimiento orbital alrededor del Sol?

Solución Para la rotación sobre su eje, tratamos a la Tierra como una esfera uniforme ($I = \frac{2}{5}MR^2$). La velocidad angular es

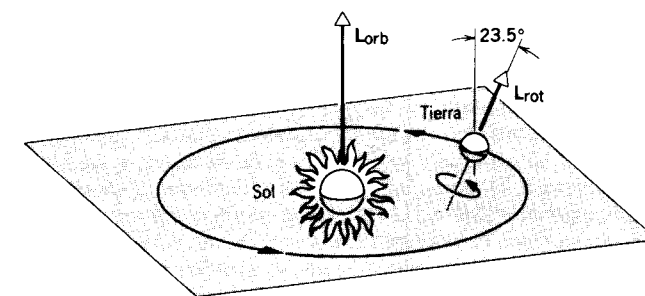


Figura 8 Problema muestra 2. La Tierra gira en una órbita (supuesta circular) alrededor del Sol, y también gira alrededor de su eje. Los dos vectores del impetu angular no son paralelos, porque el eje de rotación de la Tierra está inclinado en un ángulo de 23.5° con respecto a la normal al plano de la órbita. Las longitudes de los vectores no están trazadas a escala; L_{orb} deberá ser más grande que L_{rot} por un factor de 4×10^6 , aproximadamente.

$\omega = 2\pi/T$, donde T es el periodo de rotación ($24 \text{ h} = 8.64 \times 10^4 \text{ s}$). El impetu angular de rotación es, entonces,

$$\begin{aligned} L_{\text{rot}} &= I\omega = \frac{2}{5}MR^2 \frac{2\pi}{T} \\ &= \frac{2}{5}(5.98 \times 10^{24} \text{ kg})(6.37 \times 10^6 \text{ m})^2 \frac{2\pi}{8.64 \times 10^4 \text{ s}} \\ &= 7.05 \times 10^{33} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}. \end{aligned}$$

Para calcular el impetu angular orbital, necesitamos la inercia de rotación de la Tierra en torno a un eje que pase por el Sol. Para esto podemos tratar a la Tierra como una “partícula”, con un impetu angular $L = R_{\text{orb}}p$, en donde R_{orb} es el radio de la órbita y p es el momento lineal de la Tierra. La velocidad angular está nuevamente dada por $\omega = 2\pi/T$, en donde T es ahora el periodo orbital ($1 \text{ y} = 3.16 \times 10^7 \text{ s}$). El impetu angular orbital es

$$\begin{aligned} L_{\text{orb}} &= R_{\text{orb}}p = R_{\text{orb}}Mv = R_{\text{orb}}M(\omega R_{\text{orb}}) = MR_{\text{orb}}^2 \frac{2\pi}{T} \\ &= (5.98 \times 10^{24} \text{ kg})(1.50 \times 10^{11} \text{ m})^2 \frac{2\pi}{3.16 \times 10^7 \text{ s}} \\ &= 2.67 \times 10^{40} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}. \end{aligned}$$

El impetu angular orbital es, entonces, mucho más grande que el impetu angular de rotación.

El vector del impetu angular orbital apunta en ángulo recto al plano de la órbita de la Tierra (figura 8), mientras que el impetu angular de rotación está inclinado a un ángulo de 23.5° con respecto a la normal al plano. Despreciando la lenta precesión del eje de rotación, los dos vectores permanecen constantes tanto en magnitud como en dirección al moverse la Tierra en su órbita.

Problema muestra 3 En el problema muestra 5 del capítulo 12 halle la aceleración del bloque al caer por aplicación directa de la ecuación 8 ($\tau = d\mathbf{L}/dt$).

Solución Sobre el sistema que se muestra en la figura 9, que consiste del disco de masa M y el bloque de masa m , actúan dos

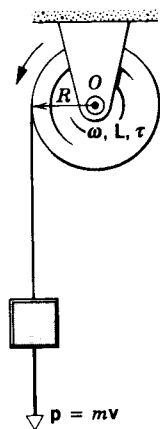


Figura 9 Problema muestra 3. La velocidad angular, el ímpetu angular, y la torca neta apuntan todos hacia afuera de la página, como lo indica el símbolo $\odot$ en O .

fuerzas externas, la atracción de la gravedad (hacia abajo) mg que actúa sobre m y la fuerza (hacia arriba) ejercida por las chumaceras de la flecha del disco, a la cual consideramos como el origen. (La tensión en el cordón es una fuerza interna y no actúa desde el exterior sobre el sistema disco + bloque.) Solamente la primera de estas fuerzas externas ejerce una torca con respecto al origen, y su magnitud es $(mg)R$.

El ímpetu angular del sistema respecto al origen O en cualquier instante es

$$L = I\omega + (mv)R,$$

en donde $I\omega$ es el ímpetu angular del disco (simétrico) y $(mv)R$ es el ímpetu angular (= ímpetu lineal $\times$ brazo del momento) del cuerpo que cae con respecto al origen. Estas dos contribuciones a L apuntan ambas en la misma dirección, es decir, perpendicularmente hacia afuera del plano de la figura 9.

Aplicando $\tau = dL/dt$ (en forma escalar) nos da

$$\begin{aligned} (mg)R &= \frac{d}{dt} (I\omega + mvR) \\ &= I \left(\frac{d\omega}{dt} \right) + mR \left(\frac{dv}{dt} \right) \\ &= I\alpha + mRa. \end{aligned}$$

Puesto que $a = \alpha R$ e $I = \frac{1}{2}MR^2$, esto se reduce a

$$mgR = (\frac{1}{2}MR^2)(a/R) + mRa$$

o sea

$$a = \frac{2mg}{M + 2m}.$$

Este resultado es idéntico al resultado del problema muestra 5 del capítulo 12.

La torca sobre una partícula que se mueve en una trayectoria circular (Opcional)

El quizás inesperado resultado de que L y ω no sean paralelos en el caso simple mostrado en la figura 6 puede causar cierta preocupación. Sin embargo, este resultado es consistente con la

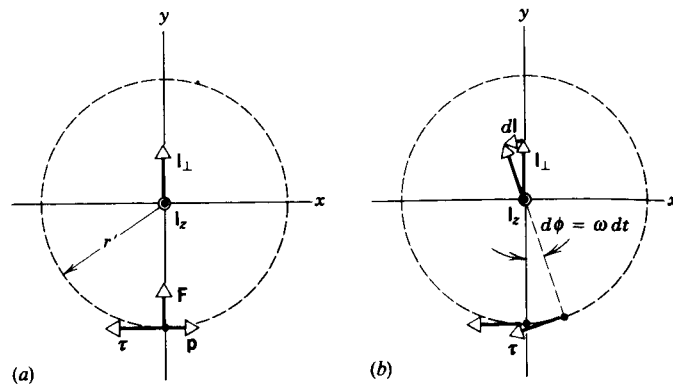


Figura 10 (a) Una vista bidimensional del plano de la partícula de la figura 6, que está girando. La componente z del ímpetu angular apunta hacia afuera del papel. (b) Cuando la partícula gira a través de un ángulo $d\phi$, la componente l_1 del vector en el plano cambia en dl . Nótese que dl es paralelo a τ .

relación general $\tau = dl/dt$ para la torca que actúa sobre una partícula aislada. El vector l está cambiando con el tiempo al moverse la partícula; el cambio es totalmente en dirección y no en magnitud. Al girar la partícula, l_1 permanece constante tanto en magnitud como en dirección, pero l_1 cambia su dirección. Este cambio de l_1 debe surgir de la aplicación de una torca. ¿Cuál es la fuente de esta torca?

Para que la partícula se mueva en círculo deberá actuar una fuerza centrípeta, como en la figura 6c, proporcionada por el brazo de soporte que une a la partícula con la flecha. (Hemos despreciado otras fuerzas externas, como la gravedad.) La única torca con respecto a O es proporcionada por F y está dada por

$$\tau = r \times F.$$

La torca τ es tangente al círculo (perpendicular al plano formado por r y F) y tiene la dirección mostrada en la figura 6c, como puede usted verificarlo por la regla de la mano derecha.

Demostremos que esta torca satisface la forma de la rotación de la segunda ley de Newton, $\tau = dl/dt$. La figura 10a muestra una vista bidimensional de la partícula al girar, viendo hacia abajo a lo largo del eje z sobre el plano xy . Al moverse la partícula en un pequeño ángulo $d\phi = \omega dt$ (Fig. 10b), el vector l_1 cambia en el pequeño incremento dl . Usted puede ver en la figura 10b que dl será siempre paralelo a τ , y así las direcciones de dl y de τ son consistentes con $\tau = dl/dt$. Podemos también demostrar que las magnitudes concuerdan. La torca con respecto a O es, refiriéndonos de nuevo a la figura 6c,

$$\tau = rF \sin(\frac{1}{2}\pi + \theta) = rF \cos \theta.$$

En este caso, F es la fuerza centrípeta y tiene una magnitud $F = mv^2/r' = m\omega^2 r'$, donde r' es el radio de la trayectoria circular ($r' = r \sin \theta$). Entonces

$$\tau = m\omega^2 r^2 \sin \theta \cos \theta. \quad (12)$$

De la figura 10b, $dl = l_1 d\theta = l_1 \omega dt$, donde obtenemos que

$$\frac{dl}{dt} = \omega l_1.$$

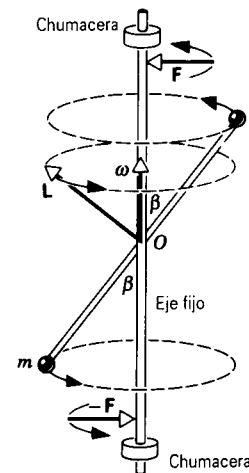


Figura 11 Un sistema de dos partículas girando, similar a la figura 7, pero con el eje de rotación formando un ángulo β con la barra de unión. El vector L del ímpetu angular gira con el sistema, como también las fuerzas F y $-F$ ejercidas por las chumaceras.

Con $l = mvr$, entonces $l_1 = mvr \cos \theta$. La velocidad tangencial v es $\omega r' = \omega r \sin \theta$, de modo que

$$l_1 = m\omega r^2 \sin \theta \cos \theta$$

y

$$\frac{dl}{dt} = \omega l_1 = m\omega^2 r^2 \sin \theta \cos \theta. \quad (13)$$

Comparando las ecuaciones 12 y 13, vemos que $\tau = dl/dt$, como se esperaba.

Cuerpos simétricos y cuerpos asimétricos

¿En qué difiere la situación entre cuerpos simétricos y asimétricos que estén girando? Supongamos que la barra que une a las dos partículas en el cuerpo simétrico de la figura 7 estuviese inclinada en un ángulo arbitrario β con respecto a la flecha central. La figura 11 muestra a la barra de unión, que, junto con la flecha y las dos chumaceras (que se suponen sin fricción) mantiene al eje a lo largo del eje z . La flecha gira con una velocidad angular constante ω en torno a este eje, apuntando entonces el vector ω a lo largo de este eje. La experiencia nos dice que tal sistema está "desbalanceado" o "colgado hacia un lado" y que, si la barra de unión no estuviera rígidamente unida a la flecha vertical cerca de O , tendería a moverse hasta que el ángulo β se convirtiera en 90° , en cuya posición el sistema sería entonces simétrico con respecto a la flecha.

En el instante mostrado en la figura 11, la partícula superior se mueve hacia adentro de la página en ángulo recto, y la partícula inferior se mueve hacia afuera de la página en ángulo recto también. Los vectores del ímpetu lineal de las dos partículas son, por lo tanto, iguales pero opuestos, como también lo son sus vectores de posición con respecto a O . De aquí que, por aplicación de la regla de la mano derecha en $r \times p$, hallamos que l es el mismo para cada partícula y que su suma, el vector del ímpetu angular total L del sistema, está, como se muestra en la figura, formando ángulo recto con la barra de unión y está en el plano de la página. Por lo tanto, L y ω no son paralelos en ese instante. Al girar el sistema, el vector del ímpetu angular,

si bien es de magnitud constante, gira alrededor del eje de rotación fijo.

La rotación de L alrededor del eje fijo de la figura 11 es perfectamente consistente con la relación fundamental $\tau = dL/dt$. La torca externa de todo el sistema proviene de las fuerzas laterales desbalanceadas ejercidas por las chumaceras sobre la flecha y transmitidas por la flecha a la barra de unión. En el instante mostrado en la figura, la partícula superior tenderá a moverse hacia afuera a la derecha. La flecha sería jalada hacia la derecha contra la chumacera superior, la que a su vez ejerce una fuerza F sobre la flecha que apunta a la izquierda. De igual manera, la partícula inferior tiende a moverse hacia afuera a la izquierda. La flecha sería jalada a la izquierda contra la chumacera inferior, la que a su vez ejerce una fuerza $-F$ sobre la flecha que apunta a la derecha. La torca τ con respecto a O que resulta de estas fuerzas apunta perpendicularmente hacia afuera de la página, formando en ángulo recto con el plano formado por L y ω , y en la dirección correcta para responder al movimiento de rotación de L . (Compárese con la Fig. 10b, en la que τ era paralelo a dl pero perpendicular a l .) Obsérvese que, a causa de que τ es perpendicular a ω , no efectúa trabajo y, por lo tanto, no cambia la energía cinética del sistema que está girando. En ausencia de fricción, el sistema giraría a perpetuidad. La fricción en las chumaceras daría lugar a una torca dirigida a lo largo de la flecha (paralela a ω), la cual efectuaría un trabajo sobre el sistema y cambiaría su energía cinética.

Las fuerzas F y $-F$ están en el plano de la figura 11 en el instante mostrado. Al girar el sistema, estas fuerzas, y por lo tanto la torca τ , giran con él, de modo que τ permanece siempre en ángulo recto al plano formado por ω y L . Las fuerzas de rotación F y $-F$ causan un bamboleo en las chumaceras superior e inferior. Las chumaceras y sus soportes deben ser lo suficientemente fuertes como para proporcionar estas fuerzas. En un cuerpo simétrico que esté girando no existe un bamboleo en las chumaceras, y la flecha gira suavemente. ■

13-4 CONSERVACIÓN DEL ÍMPETU ANGULAR

En la ecuación 8, hallamos que la razón de cambio en el tiempo del ímpetu angular total de un sistema de partículas respecto a un punto fijo en un marco de referencia inercial (o con respecto al centro de masa) es igual a la torca externa neta que actúa sobre el sistema, esto es,

$$\sum \tau_{\text{ext}} = \frac{dL}{dt}. \quad (8)$$

Si no actúa ninguna torca externa neta sobre el sistema, entonces el ímpetu angular del sistema no cambia con el tiempo:

$$\frac{dL}{dt} = 0 \quad \text{o bien} \quad L = \text{una constante}. \quad (14)$$

La ecuación 14 es el postulado matemático del principio de conservación del ímpetu angular.

Cuando la torca externa neta que actúa sobre un sistema sea cero, el vector del ímpetu angular total del sistema permanece constante.

Ésta es la tercera de las leyes de conservación más importantes que hemos estudiado. Junto con la conservación de la energía y el ímpetu lineal, la conservación del ímpetu angular es un resultado general válido para una amplia gama de sistemas. Es válido tanto en el límite relativista como en el límite cuántico y hasta ahora, no se ha encontrado ninguna excepción alguna.

Al igual que la conservación del ímpetu lineal en un sistema en el cual no actúe ninguna *fuerza* externa neta, la conservación del ímpetu angular se aplica al ímpetu angular total de un sistema de partículas en el que no actúe ninguna *torca* externa neta. El ímpetu angular de partículas individuales de un sistema puede cambiar (del mismo modo en que puede cambiar el ímpetu lineal de cada partícula en una colisión), pero el total permanece constante.

El ímpetu angular es (como el ímpetu lineal) una cantidad *vectorial* de modo que la ecuación 14 es equivalente a tres ecuaciones escalares, una para cada dirección de coordenadas que pase por el punto de referencia. La conservación del ímpetu angular nos proporciona, por lo tanto, tres condiciones del movimiento de un sistema al cual se aplique. Cualquier componente del ímpetu angular será constante si la componente correspondiente de la torca es cero; pudiera darse el caso de que sólo una de las tres componentes de la torca sea cero, lo cual significaría que sólo será constante una componente del ímpetu angular, cambiando las otras componentes como lo determinen las componentes de la torca correspondientes.

Para un sistema que consista en un cuerpo rígido que gire alrededor de un eje (digamos, el eje z) que esté fijo en un marco de referencia inercial, tenemos que

$$L_z = I\omega, \quad (15)$$

donde L_z es la componente (escalar) del ímpetu angular a lo largo del eje de rotación e I es la inercia de rotación para este mismo eje. Es posible que la inercia de rotación I de un cuerpo que gira cambie (desde i_i hasta i_f) mediante un reacomodo de sus partes. Si no actúa ninguna torca externa neta, entonces L_z debe permanecer constante y, si I cambia, debería existir un cambio compensatorio en ω desde ω_i hasta ω_f . En este caso, el principio de conservación del ímpetu angular se expresa así:

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f = \text{una constante.} \quad (16)$$

La ecuación 16 es válida no sólo para la rotación con respecto a un eje fijo sino también para la rotación alrededor de un eje que pase por el centro de masa de un sistema que se mueva, de modo que el eje permanezca siempre paralelo a sí mismo (véase la explicación al comienzo de la Sec. 12-6).

La conservación del ímpetu angular es un principio que regula una amplia variedad de procesos físicos, desde el mundo subatómico (véase la Sec. 13-6) hasta el movimiento de los acróbatas, los clavadistas, los bailarines de

ballet, la contracción de las estrellas a las que se les haya acabado el combustible, y la condensación de las galaxias. Los siguientes ejemplos muestran alguna de estas aplicaciones.

El giro de una patinadora

Una patinadora sobre hielo, al girar, pega sus brazos al cuerpo para girar más rápidamente y los extiende para girar más despacio. Al hacerlo, no hace sino aplicar la ecuación 16. En la figura 12 se ilustra otra aplicación de este principio, mostrando a un estudiante sentado sobre un banquillo que puede girar libremente en torno a un eje vertical. Hagamos que el estudiante extienda sus brazos sosteniendo a las pesas, y que gire con una velocidad angular ω_i . En la figura, el vector $\mathbf{L}$ de su ímpetu angular yace a lo largo del eje vertical.

El sistema, que consta de estudiante + banquillo + pesas, es un sistema aislado sobre el cual no actúa ninguna torca vertical externa. Por lo tanto, la componente vertical del ímpetu angular debe conservarse.

Cuando el estudiante pega sus brazos (y las pesas) hacia el cuerpo, la inercia de rotación de su sistema se reduce desde su valor inicial I_i hasta un valor más pequeño I_f , porque las pesas están ahora más cerca del eje de rotación. Su velocidad angular final, según la ecuación 16, es $\omega_f = \omega_i(I_i/I_f)$, la cual es más grande que su velocidad angular inicial (porque $I_f < I_i$), y el estudiante gira más rápidamente. Para disminuir su velocidad sólo necesita extender sus brazos otra vez.

¿Cambia la energía cinética del sistema? De ser así, ¿cuál es la fuente del trabajo que hace cambiar a la energía cinética?

La clavadista en el trampolín*

La figura 13a muestra a una clavadista abandonando el trampolín. Al saltar, se empuja a sí misma ligeramente hacia adelante, de modo que adquiera una velocidad de rotación pequeña, justo la suficiente para llevarla de cabeza hacia el agua al tiempo que su cuerpo gira en una media vuelta durante el arco.

Mientras está en el aire, no actúan sobre ella torcas externas que cambien su ímpetu angular con respecto a su centro de masa. (La única fuerza externa, la gravedad, actúa a través de su centro de masa y, por lo tanto, no produce una torca con respecto a ese punto. Despreciamos

* Véase "The Mechanics of Swimming and Diving", por R. L. Page, *The Physics Teacher*, febrero de 1976, pág. 72; "The Physics of Somersaulting and Twisting", por Cliff Frohlich, *Scientific American*, marzo de 1980, pág. 155.

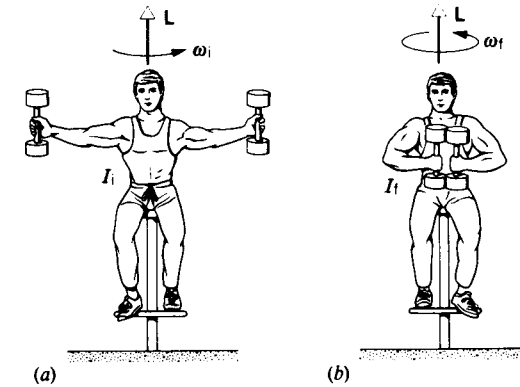


Figura 12 (a) En esta configuración, el sistema (estudiante + pesas) tiene una inercia de rotación más grande y una velocidad angular más pequeña. (b) Aquí el estudiante ha llevado a las pesas hacia adentro, dando una inercia de rotación más pequeña, y por lo tanto, una velocidad angular más grande. El ímpetu angular $\mathbf{L}$ tiene el mismo valor en ambas situaciones.

la resistencia del aire, que podría producir una torca neta y cambiar su ímpetu angular.) Cuando ella impulsa su cuerpo hacia la *posición de escuadra*, disminuye su inercia de rotación y, por lo tanto, de acuerdo con la ecuación 16, su velocidad angular debe aumentar. El aumento en la velocidad angular le permite completar $1\frac{1}{2}$ vueltas, si bien ella había completado previamente sólo media vuelta (Fig. 13b). Al final del clavado, vuelve a la *posición normal de caída* y disminuye su velocidad angular para entrar en el agua.

El giro de una rueda de bicicleta

La figura 14a muestra a una estudiante sentada sobre un banquillo que está libre de girar en torno a un eje vertical. La estudiante sostiene una rueda de bicicleta que ha sido puesta a girar. Cuando la estudiante le da vuelta a la rueda, el banquillo comienza a girar (Fig. 14b).

No actúa ninguna torca vertical sobre el sistema que consiste en estudiante + banquillo + rueda, y por lo tanto la componente vertical del ímpetu angular total del sistema debe permanecer constante. Inicialmente, la rueda está girando con un ímpetu angular L hacia arriba, que es el total del sistema. Cuando la rueda se voltea, la componente vertical del ímpetu angular de la rueda es ahora $-L$, pero la componente vertical del ímpetu angular *total* debe permanecer constante en $+L$. La estudiante + el banquillo deben por lo tanto adquirir un ímpetu angular de $L' = +2L$, de modo que el ímpetu angular final de $+2L - L$ permanece igual al ímpetu angular inicial. Si I_s es la inercia de rotación de la estudiante + el banquillo, la velocidad de rotación será $\omega = 2L/I_s$.

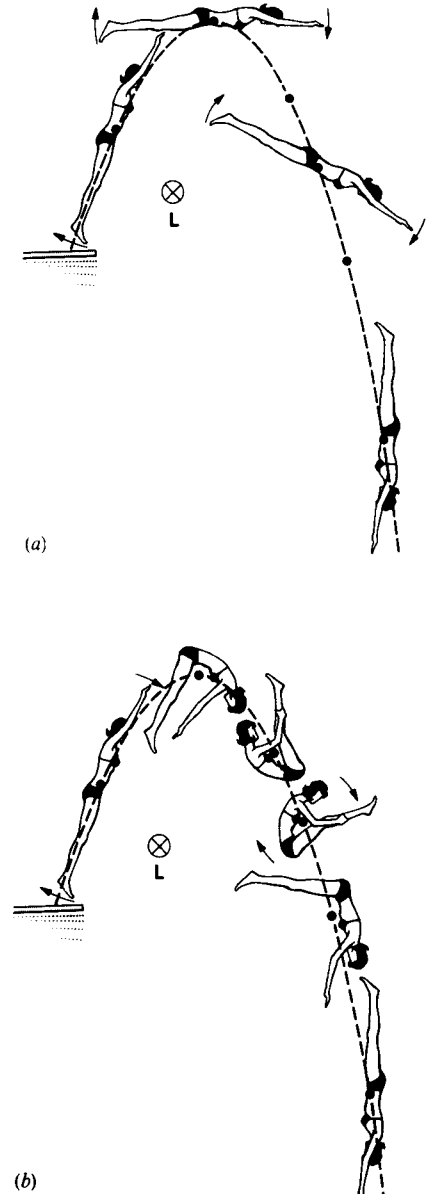


Figura 13 (a) Una clavadista abandona el trampolín de manera tal que éste le imparte un ímpetu angular $\mathbf{L}$. Ella gira con respecto a su centro de masa (indicado por el punto grueso) una media vuelta, mientras que el centro de masa sigue una trayectoria parabólica. (b) Al entrar a la posición de escuadra, reduce su inercia de rotación y, por lo tanto, aumenta su velocidad angular, permitiéndole dar $1\frac{1}{2}$ vueltas. Las fuerzas externas y las torcas sobre ella son las mismas en (a) y en (b), como lo indica el valor constante del ímpetu angular $\mathbf{L}$.

Podemos también considerar esta situación desde el punto de vista de dos sistemas por separado, siendo uno la rueda y el otro la estudiante + el banquillo. Ninguno de estos sistemas está ahora aislado: la mano de la estudiante

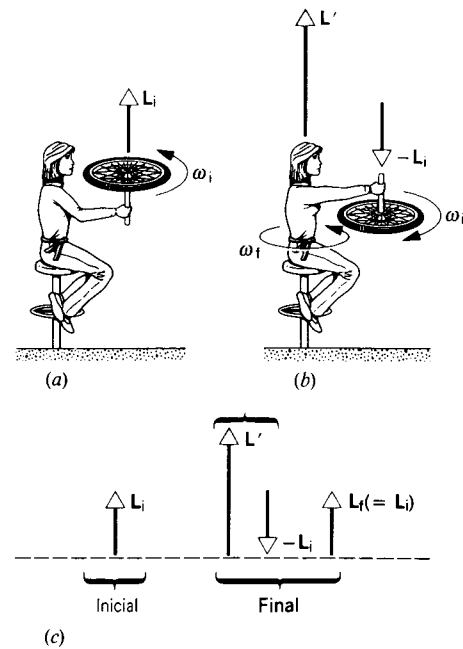


Figura 14 (a) Una estudiante sostiene una rueda de bicicleta que está girando. El ímpetu angular total del sistema es L_i . (b) Cuando la rueda de bicicleta es invertida, la estudiante comienza a girar. (c) El ímpetu angular final total debe ser igual al ímpetu angular inicial.

constituye una unión entre ellos. Cuando la estudiante intenta voltear la rueda, debe aplicar una torca para cambiar el ímpetu angular de la rueda. La fuerza que ella ejerce sobre la rueda para producir esa torca es regresada por la rueda como una fuerza de reacción sobre ella, según la tercera ley de Newton. Esta fuerza externa sobre el sistema estudiante + banquillo causa que ese sistema gire. Desde este punto de vista la estudiante ejerce una torca externa sobre la rueda para cambiar su ímpetu angular, mientras que la rueda ejerce una torca sobre la estudiante para cambiar su ímpetu angular. Si consideramos al sistema completo consistente en estudiante + banquillo + rueda, como hicimos antes, esta torca es una torca interna que no ha sido incluida en nuestros cálculos. El hecho de que consideremos a la torca como interna o como externa depende de cómo definamos a nuestro sistema.

La estabilidad de los objetos que giran

Consideremos una vez más la figura 3b. Un objeto que se mueva con un ímpetu lineal $\mathbf{p} = M\mathbf{v}$ tiene una *estabilidad direccional*; una fuerza de desviación proporciona el impulso correspondiente a un incremento lateral del ímpetu $\Delta\mathbf{p}_\perp$ y, como resultado, la dirección del movimiento cambia según un ángulo $\theta = \tan^{-1}(\Delta p_\perp/p)$. Cuanto más grande sea el ímpetu p , más pequeño será el ángulo θ . La misma

fuerza de desviación es menos eficaz en desviar un objeto con un ímpetu lineal grande que en desviar un objeto con un ímpetu lineal pequeño.

El ímpetu angular proporciona a un objeto una *estabilidad de orientación* de manera muy similar. Un objeto en rotación tiene un cierto ímpetu angular $\mathbf{L}$. Una torca τ perpendicular a $\mathbf{L}$ cambia la dirección de $\mathbf{L}$ y, por lo tanto, la dirección del eje de rotación, en un ángulo $\theta = \tan^{-1}(\Delta L_\perp/L)$. Una vez más, cuanto más grande sea el ímpetu angular L , menor posibilidad tendrá una torca dada para cambiar la dirección del eje del objeto en rotación.

Cuando le damos a un objeto un ímpetu angular de rotación respecto a un eje de simetría, en efecto, estabilizamos su orientación y hacemos más difícil que las fuerzas externas cambien su orientación. Existen muchos ejemplos comunes de este efecto. Una bicicleta sin ocupante a la que se le imprima un ligero empujón puede permanecer en posición vertical durante una distancia más larga de lo que pudiéramos esperar. En este caso es el ímpetu angular de las ruedas al girar el que proporciona la estabilidad. Las protuberancias y curvas pequeñas del camino, que de otro modo derribarían o desviarían a un objeto que no estuviese girando, equilibrado en una base tan angosta como una llanta de bicicleta, tendrán menos efecto en este caso debido a la tendencia del ímpetu angular de las ruedas a fijar su orientación.*

Una pelota de fútbol americano es lanzada para un pase largo hacia el frente de modo que gire en torno a un eje que es aproximadamente paralelo a su velocidad de traslación. Esto estabiliza la orientación de la pelota de fútbol e impide que se bambolee, lo cual hace posible lanzarla con mayor precisión y atraparla más eficazmente. También mantiene el perfil más pequeño de la pelota en la dirección hacia adelante, minimizando la resistencia del aire y aumentando el alcance.

Es importante estabilizar la orientación de un satélite, en particular si éste utiliza sus impulsos para llegar a una posición orbital específica (Fig. 15). La orientación pudiera cambiar, por ejemplo, por la fricción de una atmósfera residual enrarecida en altitudes orbitales, por el viento solar (un haz de partículas cargadas proveniente del Sol), o por los impactos con pequeños meteoroides. Para reducir los efectos de tales encuentros, se hace que el artefacto gire en torno a un eje, estabilizando, por lo tanto, su orientación.

El colapso de las estrellas

La mayoría de las estrellas giran, como lo hace nuestro Sol. Nuestro astro rey gira una vez alrededor de su eje cada

* Véase "The Stability of the Bicycle", por David E. H. Jones, *Physics Today*, abril de 1970, pág. 34.



Figura 15 El satélite Morelos-D, un satélite de comunicaciones de México, desde el compartimiento de carga del taxi espacial el 17 de noviembre de 1985. Se hace que el satélite gire alrededor de su eje central (el eje vertical en esta foto) para estabilizar su orientación en el espacio mientras viaja hacia su órbita de geosincronismo.

mes, aproximadamente. (El Sol es una bola de gas y no gira realmente como un cuerpo rígido; las regiones cercanas a los polos tienen un periodo de rotación de unos 37 días, mientras que el ecuador gira una vez cada 26 días.) El Sol no llega al colapso a causa de su *presión de radiación*, en esencia, el efecto del impulso de las colisiones de la radiación emergente contra los átomos del Sol. Cuando el combustible nuclear del Sol se haya consumido, la presión de radiación desaparecerá, y el Sol comenzará colapsarse, aumentando su densidad en forma correspondiente. En algún punto la densidad será tan grande que los átomos simplemente no podrán aglutinarse más, y el colapso quedará detenido.

Sin embargo, en las estrellas con una masa de 1.4 veces mayor que la del Sol la fuerza de la gravedad es tan fuerte que los átomos no pueden impedir que continúe el colapso. En efecto, los átomos se aplastan por la acción de la gravedad, y el colapso continúa hasta que los núcleos se tocan entre sí. La estrella se convierte realmente en un núcleo atómico gigante, y recibe el nombre de *estrella neutrónica*. El radio de una estrella neutrónica de alrededor 1.5 veces la masa solar es de 11 km.

Supongamos que la estrella comenzó a colapsarse igual que nuestro Sol, girando una vez cada mes. Las fuerzas durante el colapso son claramente fuerzas internas, que no pueden cambiar el ímpetu angular. La velocidad angular

final, por lo tanto, se relaciona con la velocidad angular inicial por la ecuación 16: $\omega_f = \omega_i (I_i/I_f)$. La razón de las inercias de rotación será la misma que la razón de los cuadrados de los radios: $I_i/I_f = r_i^2/r_f^2$. Si el radio inicial fuese aproximadamente igual al del Sol (alrededor de 7×10^5 km), entonces

$$I_i/I_f = r_i^2/r_f^2 = (7 \times 10^5 \text{ km})^2/(11 \text{ km})^2 = 4 \times 10^9.$$

Esto es, su velocidad de rotación va desde una vez por mes hasta 4×10^9 veces por mes, ¡a más de 1000 revoluciones por segundo!

Las estrellas neutrónicas pueden ser observadas desde la Tierra, porque (de nuevo al igual que el Sol) tienen campos magnéticos que atrapan electrones y, al girar la estrella, los electrones se aceleran a velocidades tangenciales muy elevadas. Estos electrones acelerados emiten una radiación, que vemos desde la Tierra como si fuera un faro reflector mientras la estrella gira. Estos vivos impulsos de radiación son la causa de que estas estrellas neutrónicas en rotación reciban el nombre de *pulsares*. En la figura 16 se muestra un ejemplo de la radiación emitida por un pulsar.

La conservación del ímpetu angular se aplica a una amplia variedad de fenómenos astrofísicos. La rotación de nuestra galaxia, por ejemplo, es el resultado de una rotación inicial mucho más lenta de la nube gasosa de la cual se condensó la galaxia; la rotación del Sol y las órbitas de los planetas quedaron determinadas por la rotación original del material con que se formó nuestro Sistema solar.

Problema muestra 4 Un astronauta de 120 kg, que lleva a cabo una "caminata espacial", está atado a una nave espacial por medio de una cuerda totalmente extendida de 180 m de longitud. Una operación no intencional del paquete propulsor provoca que el astronauta adquiera una pequeña velocidad tangencial de 2.5 m/s. Para regresar a la nave, el astronauta comienza a jalar a lo largo de la cuerda a razón lenta y constante. ¿Con qué fuerza deberá jalar el astronauta hasta las distancias de (a) 50 m y (b) 5 m de la nave? ¿Cuál será la velocidad tangencial del astronauta en estos puntos?

Solución No actúan torcas externas sobre el astronauta, de modo que se cumple la conservación del ímpetu angular. Esto es, el ímpetu angular inicial del astronauta con relación a la nave espacial como origen ($Mv_i r_i$) cuando comienza a jalar de la cuerda, debe ser igual al ímpetu angular ($Mv_f r_f$) en cualquier punto del movimiento. Así,

$$Mv_i r_i = Mv_f r_f$$

o sea

$$v = \frac{v_i r_i}{r}$$

La fuerza centrípeta en cualquier etapa está dada por

$$F = \frac{Mv^2}{r} = \frac{Mv_i^2 r_i^2}{r^3}.$$

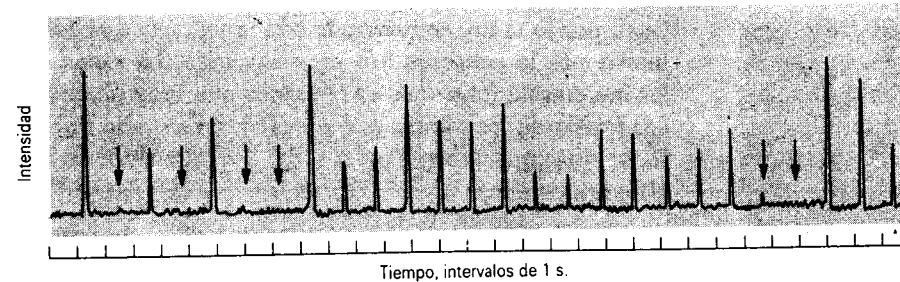


Figura 16 Las pulsaciones electromagnéticas recibidas en la Tierra desde una estrella neutróica que gira rápidamente. Las flechas verticales indican pulsaciones demasiado débiles como para ser detectadas. El intervalo entre pulsaciones es notablemente constante, siendo igual a 1.187,911,164 s.

Inicialmente, la fuerza centrípeta requerida es de

$$F = \frac{(120 \text{ kg})(2.5 \text{ m/s})^2}{180 \text{ m}} = 4.2 \text{ N (about 1 lb).}$$

(a) Cuando el astronauta esté a 50 m de la nave, la velocidad tangencial es

$$v = \frac{(2.5 \text{ m/s})(180 \text{ m})}{50 \text{ m}} = 9.0 \text{ m/s,}$$

y la fuerza centrípeta es

$$F = \frac{(120 \text{ kg})(2.5 \text{ m/s})^2(180 \text{ m})^2}{(50 \text{ m})^3} = 194 \text{ N (alrededor de 44 lb).}$$

(b) A 5 m de la nave, la velocidad sube en un factor de 10 a 90 m/s, mientras que la fuerza aumenta en un factor de 10^3 a $1.94 \times 10^5 \text{ N}$, o ¡alrededor de 22 tons! Está claro que el astronauta no puede ejercer tal fuerza para regresar a la nave. Incluso si el astronauta fuera arrastrado hacia la nave por medio de un malacate desde el interior de la nave, la cuerda no podría soportar una tensión tan grande; en algún punto se rompería y el astronauta saldría disparado hacia el espacio con la velocidad tangencial que tuviera en el momento de romperse la cuerda. Conclusión: Los astronautas que caminen por el espacio deben evitar adquirir una velocidad tangencial. ¿Qué podría hacer el astronauta para regresar con seguridad a la nave?

Problema muestra 5 Una tornamesa que consta de un disco de 125 g de masa y un radio de 7.2 cm gira a una velocidad angular de 0.84 rev/s en torno a un eje vertical (Fig. 17a). De repente, se deja caer un disco idéntico, que inicialmente no estaba girando, sobre el primero. La fricción entre los dos discos causa que eventualmente giren a la misma velocidad. Sobre estos dos, se deja luego caer un tercer disco idéntico, que inicialmente no estaba girando, siguiendo los tres en giro juntos (Fig. 17b). (a) ¿Cuál es la velocidad angular de rotación de la combinación? (b) ¿Cuánta energía cinética de rotación se pierde debido a la fricción? (c) Un motor que impulse al primer disco debe restituir la velocidad angular de la combinación a su valor original en una revolución. ¿Qué torca constante deberá ejercer el motor?

Solución (a) Este problema es el análogo de rotación de la colisión completamente inelástica. No existe una torca vertical neta, de modo que la componente vertical del ímpetu angular es constante. La fuerza de fricción entre los discos es una fuerza interna, la cual no puede cambiar el ímpetu angular. Entonces se aplica la ecuación 16, y podemos escribir:

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f \\ \omega_f = \omega_i (I_i / I_f).$$

Sin hacer ningún cálculo detallado, sabemos que la inercia de rotación de tres discos idénticos en torno a su eje común será tres veces la inercia de rotación de un solo disco. Entonces, $I_i / I_f = \frac{1}{3}$ y

$$\omega_f = (0.84 \text{ rev/s})(\frac{1}{3}) = 0.28 \text{ rev/s.}$$

(b) La inercia de rotación de un disco con respecto a su eje es $\frac{1}{2}MR^2$, así que, para cada disco,

$$I = \frac{1}{2}(0.125 \text{ kg})(0.072 \text{ m})^2 = 3.24 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

La energía cinética de rotación inicial es

$$K_i = \frac{1}{2}I\omega_i^2 \\ = \frac{1}{2}(3.24 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(2\pi \text{ rad/rev} \times 0.84 \text{ rev/s})^2 \\ = 4.51 \times 10^{-3} \text{ J.}$$

Podemos seguir un procedimiento más rápido calculando la energía cinética final, porque sabemos que la inercia de rotación final sube en un factor de 3, mientras que la velocidad angular final baja en un factor de $\frac{1}{3}$. Puesto que la energía cinética depende del cuadrado de la velocidad angular, tenemos

$$K_f = K_i \times 3 \times (\frac{1}{3})^2 = (\frac{1}{3})(4.51 \times 10^{-3} \text{ J}) \\ = 1.50 \times 10^{-3} \text{ J.}$$

El cambio en la energía cinética es

$$\Delta K = K_f - K_i = (1.50 \times 10^{-3} \text{ J}) - (4.51 \times 10^{-3} \text{ J}) \\ = -3.01 \times 10^{-3} \text{ J.}$$

El signo menos indica que la energía cinética se pierde.

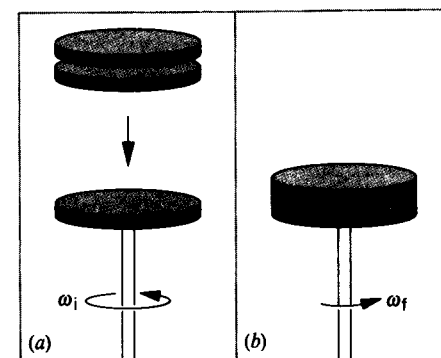


Figura 17 Problema muestra 5. (a) Un disco que gira con una velocidad angular inicial ω_i . (b) Dos discos idénticos, ninguno de los cuales está girando inicialmente, se dejan caer sobre el primero, y todo el sistema gira entonces con una velocidad angular ω_f .

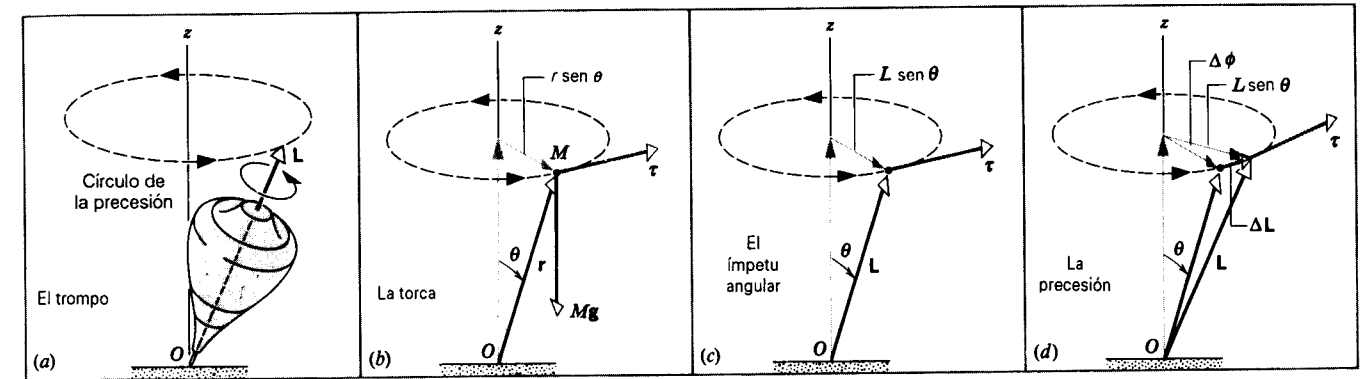


Figura 18 (a) Un trompo gira en precesión alrededor de un eje vertical. (b) El peso del trompo ejerce una torca con respecto al punto de contacto con el suelo. (c) La torca es perpendicular al vector del ímpetu angular. (d) La torca cambia la dirección del vector del ímpetu angular, causando la precesión.

(c) Para restituir la velocidad angular inicial, el motor tendrá que aumentar ω desde 0.28 rev/s hasta 0.84 rev/s, esto es, en un factor de 3. Eso significa que la energía cinética debe aumentar en un factor de $3^2 = 9$, desde $1.50 \times 10^{-3} \text{ J}$ hasta $13.5 \times 10^{-3} \text{ J}$. El cambio en energía cinética, que es igual al trabajo efectuado por el motor, es

$$\Delta K = 13.5 \times 10^{-3} \text{ J} - 1.50 \times 10^{-3} \text{ J} = 12.0 \times 10^{-3} \text{ J.}$$

En el movimiento de rotación, el trabajo está dado por $W = \tau\phi$, donde $\phi (= 2\pi \text{ rad en este caso})$ es el desplazamiento angular del cuerpo que gira por medio del cual debe mantenerse la torca. Entonces

$$\tau = \frac{W}{\phi} = \frac{\Delta K}{\phi} = \frac{12.0 \times 10^{-3} \text{ J}}{2\pi \text{ rad}} \\ = 1.91 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m.}$$

13-5 EL TROMPO*

Un trompo nos proporciona el ejemplo quizá más conocido del fenómeno mostrado en la figura 4b, donde una torca lateral cambia la dirección pero no la magnitud de un ímpetu angular. La figura 18a muestra un trompo que gira en torno a su eje. Se supone que la punta inferior del trompo está fija en el origen O de nuestro marco de referencia inercial. Sabemos por experiencia que el eje de este trompo que gira rápidamente se moverá lentamente en torno al eje vertical. Este movimiento se llama *precesión*, y surge de la configuración ilustrada en la figura 4b, donde la gravedad proporciona la torca externa.

* Véase "The Amateur Scientist: The Physics of Spinning Tops, Including Some Far-Out Ones", por Jearl Walker, *Scientific American*, marzo de 1981, pág. 185.

La figura 18b muestra un diagrama simplificado, en el cual el trompo se halla sustituido por una partícula de masa M ubicada en el centro de masa del trompo. La fuerza gravitatoria Mg proporciona una torca con respecto a O de magnitud

$$\tau = Mgr \sin \theta. \quad (17)$$

La torca, que es perpendicular al eje del trompo y, por lo tanto, perpendicular a L (Fig. 18c), puede cambiar la dirección de L pero no su magnitud. El cambio en L en un tiempo Δt está dado por

$$\Delta L = \tau \Delta t \quad (18)$$

y está en la misma dirección que τ , esto es, perpendicular a L . El efecto de τ es, por lo tanto, cambiar L a $L + \Delta L$, un vector de la misma longitud que L pero que apunta en una dirección diferente. (Suponemos que el trompo gira tan rápidamente que L es grande, y entonces $L \gg \Delta L$.)

Si el trompo tiene simetría axial, entonces el ímpetu angular estará a lo largo del eje de rotación del trompo. Al cambiar L de dirección, el eje cambia de dirección también. La punta del vector L y el eje del trompo trazan un círculo en torno al eje z , como se muestra en la figura 18a. Este movimiento es la precesión del trompo.

En un tiempo Δt , el eje gira en un ángulo $\Delta\phi$ (véase la Fig. 18d), y entonces la rapidez angular de la precesión es

$$\omega_p = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}. \quad (19)$$

De la figura 18d vemos que

$$\Delta\phi = \frac{\Delta L}{L \sin \theta} = \frac{\tau \Delta t}{L \sin \theta}. \quad (20)$$

Entonces

$$\omega_p = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{\tau}{L \sin \theta} = \frac{Mgr \sin \theta}{L \sin \theta} = \frac{Mgr}{L}. \quad (21)$$

La velocidad de la precesión es inversamente proporcional al ímpetu angular; cuanto más rápido esté girando el trompo, más lenta será la precesión.

El movimiento de precesión ocurre en torno al eje z , y entonces el vector ω_p está en la dirección de z . Le será posible a usted demostrar que la siguiente ecuación vectorial da la relación apropiada entre las magnitudes y las direcciones de las variables dinámicas en este cálculo:

$$\tau = \omega_p \times L. \quad (22)$$

¿Puede usted escribir una ecuación vectorial similar para el caso correspondiente de una partícula que se mueva en círculo a velocidad constante bajo la influencia de una fuerza centrípeta?

13-6 CUANTIZACIÓN DEL ÍMPETU ANGULAR (Opcional)

En la sección 8-8 hemos estudiado la cuantización de la energía, la cual se restringía a la emisión o absorción de la energía de forma que tuviese lugar solamente en haces discretos o cuantos. En el mundo microscópico de los sistemas atómicos y subatómicos, no podemos cambiar la energía en una cantidad arbitraria, sino solamente en cantidades de un tamaño predeterminado. Estos cuantos son tan diminutos que no nos es posible observar esta estructura discreta en los cambios de energía de sistemas de tamaño ordinario.

La cuantización del ímpetu angular ocurre de un modo similar. Desarrollaremos este concepto más extensamente, proporcionando una evidencia experimental y un soporte teórico, en el capítulo 51 de la versión ampliada de este texto cuando estudiemos la estructura de los átomos. Por ahora, simplemente presentaremos alguna de las ideas generales y mostraremos cómo se relacionan con las propiedades asociadas al ímpetu angular que hemos desarrollado en este capítulo.

Los cambios cuantizados del movimiento de rotación de un sistema se hallan restringidos a presentarse en unidades dadas por múltiplos enteros de una constante fundamental:

$$\Delta L = n(h/2\pi) \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (23)$$

Aquí h es la constante de Planck, que tiene un valor de $6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$. Esta unidad básica es una cantidad de ímpetu angular extraordinariamente pequeña. Por ejemplo, un disco de fonógrafo gira con relativa lentitud pero tiene un ímpetu angular del orden de 10^{32} unidades de $h/2\pi$. Cuando afinamos las velocidades de nuestras tornamesas, ciertamente no nos es posible observar estos sencillos brincos discretos en una escala de ¡1 parte en 10^{32} !

La ecuación 23 de la cuantización del ímpetu angular se aplica al movimiento de los electrones de los átomos en sus órbitas en torno al núcleo. Este sistema tiene un *ímpetu angular orbital*, el cual debe permanecer constante durante la órbita, porque la fuerza entre el electrón y el núcleo es una fuerza interna en el sistema y, por lo tanto, no puede cambiar su ímpetu angular. Las fuerzas externas, como los campos eléctricos o magnéticos, pueden provocar que el electrón brinque a otra órbita, donde su ímpetu angular pudiera tener un valor diferente, pero el cambio en L debe ser un múltiplo entero de $h/2\pi$, como lo requiere la ecuación 23. El ímpetu angular orbital sirve

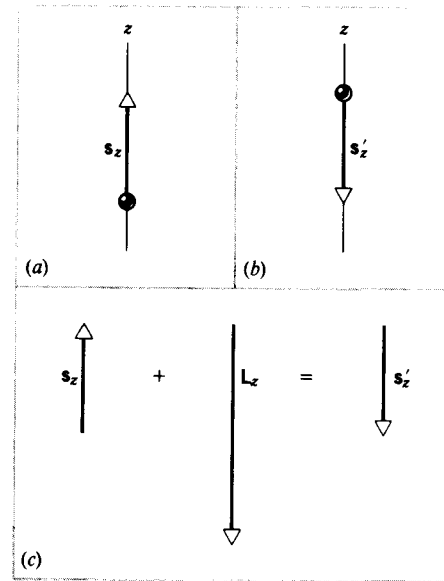


Figura 19 (a) Un protón con un ímpetu angular intrínseco (espín) s tiene una componente s_z a lo largo del eje z . (b) Después de absorber un fotón, la componente z del espín se invierte. (c) La componente z del ímpetu angular inicial, igual a la unidad $+\frac{1}{2}$, se suma a la componente z del ímpetu angular del fotón, igual a la unidad -1 , dando por resultado una unidad de $-\frac{1}{2}$.

entonces como un distintivo conveniente y útil de las órbitas electrónicas de los átomos.

Los experimentos efectuados en los años 1920 indicaban que los electrones de los átomos tenían otra clase de ímpetu angular, que no podía ser responsable del movimiento orbital. Esta nueva clase de ímpetu angular, que se conoce como *ímpetu angular intrínseco*, es una propiedad característica de la propia partícula y no es un resultado de su estado de movimiento en particular. Una manera útil (pero estrictamente incorrecta) de visualizar el ímpetu angular intrínseco es en términos del giro de la partícula sobre su eje; por esta razón, al ímpetu angular intrínseco se le llama, a menudo, “espín” y se le indica con el símbolo s .

El electrón tiene un ímpetu angular intrínseco de $\frac{1}{2}(h/2\pi)$. Esto significa que, con relación a cualquier eje z que podamos elegir para definirla, la componente z del ímpetu angular debe ser

$$s_z = +\frac{1}{2}(h/2\pi) \quad \text{o} \quad s_z = -\frac{1}{2}(h/2\pi).$$

Nótese que la diferencia entre estas dos posibilidades, la cual pudiera corresponder a un *cambio* en la dirección del ímpetu angular intrínseco de un electrón, es $h/2\pi$, consistente con la ecuación 23.

Por lo general, el ímpetu angular intrínseco se expresa asignándole el *número cuántico del espín*, que es el ímpetu angular intrínseco en unidades de $h/2\pi$; el electrón tiene entonces un número del espín cuántico de $\frac{1}{2}$. El protón y el neutrón tienen también números del espín cuántico de $\frac{1}{2}$. El fotón (el haz cuantizado de radiación electromagnética) tiene un número del espín cuántico de 1. Todas las partículas elementales pueden caracterizarse por su número del espín cuántico, el cual se considera una propiedad fundamental de la partícula junto con su masa y carga eléctrica.

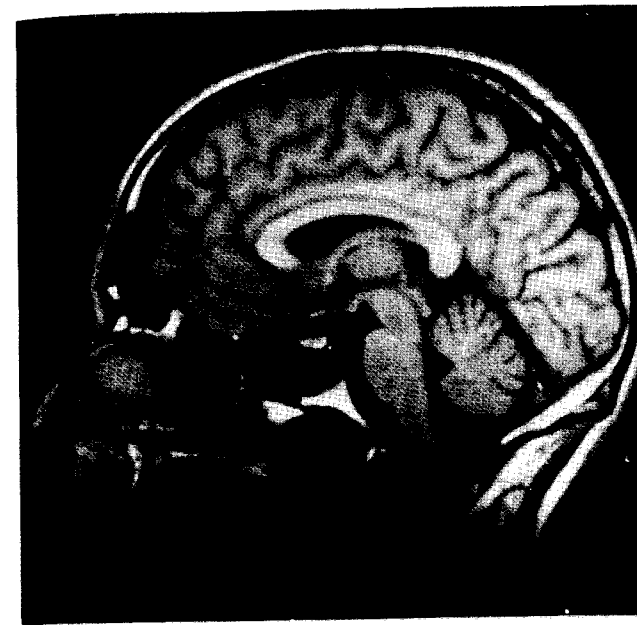


Figura 20 Vista del cráneo de un paciente mediante la imagen de resonancia magnética (MRI).

Una aplicación importante del principio de conservación del ímpetu angular cuantizado consiste en el efecto conocido como *resonancia magnética nuclear*. Consideremos al protón (el núcleo del átomo de hidrógeno), con su número del espín cuántico de $\frac{1}{2}$. En la figura 19a se muestra una representación del ímpetu angular intrínseco del protón en una orientación particular. La componente z del momento angular es $s_z = +\frac{1}{2}(h/2\pi)$. Si exponemos protones a la radiación de la energía apropiada, la absorción de un fotón electromagnético (espín = 1, ímpetu angular = $h/2\pi$) puede cambiar la componente z del ímpetu angular del protón en una unidad, desde $+\frac{1}{2}(h/2\pi)$ hasta $-\frac{1}{2}(h/2\pi)$, como en la figura 19b. La adición de las componentes z de s y de L en la figura 19c muestra cómo se suman el espín inicial s

del protón y el ímpetu angular L_z del fotón para dar el espín final (invertido) s'_z del protón. La figura 19c es otro ejemplo más de la conservación del ímpetu angular, siendo el ímpetu angular inicial ($s + L$) igual al ímpetu angular final (s') en ausencia de una torca externa.

En la resonancia magnética nuclear (NMR o *nuclear magnetic resonance*), se usa un campo magnético estático en la dirección z para alinear los giros del protón con el eje z , como en la figura 19a. Un campo electromagnético separado que varía con el tiempo a frecuencias de radio proporciona fotones de apenas la energía correcta para ser absorbidos y provoca que los giros del protón se inviertan.

Puesto que el cuerpo humano está formado en su mayoría de agua, la cual es rica en hidrógeno, la absorción de esta radiación electromagnética provee un modo de formar una imagen de los órganos internos del cuerpo (figura 20). Se cree que la radiación electromagnética en forma de ondas de radio significa poco peligro para el cuerpo; los rayos X, que se usan también para formar imágenes, tienen un potencial mucho más grande para causar daño al organismo. Las *imágenes de resonancia magnética* pueden reemplazar ampliamente las fotografías con rayos X como técnica de diagnóstico. ■

13-7 DINÁMICA DE LA ROTACIÓN: UN REPASO

En los capítulos 11 al 13 hemos presentado una visión general de los temas de la dinámica y la cinemática de la rotación. Un tratamiento completo del tema queda fuera del alcance de este texto, pero existen muchas situaciones físicas que pueden ser analizadas usando los resultados que hemos derivado. Es importante recordar que algunos de nuestros resultados pueden aplicarse *solamente* en ciertas situaciones especiales. Para ayudar al lector a este respecto, hemos reunido algunas ecuaciones fundamentales de la dinámica de la rotación en la tabla 1.

TABLA 1 RESUMEN DE LAS ECUACIONES DE LA DINÁMICA DE LA ROTACIÓN

Ecuación	Observaciones
I. Ecuaciones de definición	
$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$	Torca sobre una partícula con respecto a un punto O debido a una fuerza $\mathbf{F}$.
$\tau_{\text{ext}} = \sum \tau_n$	Torca externa resultante de un sistema de partículas sobre el que actúan varias torcas individuales τ_n con respecto a un punto O .
$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$	Ímpetu angular de una partícula con respecto a un punto O .
$\mathbf{L} = \sum \mathbf{l}_n$	Ímpetu angular resultante de un sistema de partículas con respecto a un punto O .
II. Relaciones generales	
$\tau = \frac{d\mathbf{l}}{dt}$	La ley del movimiento de una sola partícula aislada sobre la que actúa una torca τ . Tanto τ como $\mathbf{l}$ se miden con respecto a un punto O de un marco de referencia inercial. Esta expresión es el análogo rotatorio de la expresión $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ del movimiento de traslación.
$\sum \tau_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$	La ley del movimiento para un sistema de partículas sobre el que actúa una torca externa resultante. Se mantiene solamente τ_{ext} si $\mathbf{L}$ se miden con respecto a (1) cualquier punto O fijo en un marco de referencia inercial

TABLA 1 RESUMEN DE LAS ECUACIONES DE LA DINÁMICA DE LA ROTACIÓN

Ecuación	Observaciones
III. Caso especial	
Los resultados siguientes se cumplen en el caso de un cuerpo rígido que gire con respecto a un eje que esté fijo en un marco de referencia inercial.	
$\tau = I\alpha$	α debe estar a lo largo del eje; I debe referirse también al eje, y τ es la componente escalar de τ_{ext} a lo largo del mismo eje. Esto es el análogo rotatorio de $F = Ma$.
$L = I\omega$	ω debe estar a lo largo del eje; I debe referirse también al eje, y L debe ser la componente escalar del ímpetu angular total a lo largo de este eje. Esto es el análogo rotatorio de $P = Mv$.

PREGUNTAS

- Hasta aquí nos hemos encontrado con muchas cantidades vectoriales, incluyendo la posición, el desplazamiento, la velocidad, la aceleración, la fuerza, el ímpetu, y el ímpetu angular. ¿Cuáles de éstas se definen independientemente de la elección del origen en el marco de referencia?
- Un físico ilustre (R. W. Wood), quien gusta de las bromas prácticas, montó un volante que giraba rápidamente en una maleta; la maleta la dio a un maletero con instrucciones de que éste lo siguiera. ¿Qué pasará si el maletero era conducido muy deprisa a doblar una esquina? Explique en términos de $\tau = dL/dt$.
- Un cilindro gira a una velocidad angular ω alrededor de un eje que pasa por un extremo, como en la figura 21. Elija un origen apropiado y muestre cualitativamente los vectores L y ω . ¿Son estos vectores paralelos? ¿Intervienen aquí consideraciones de simetría?

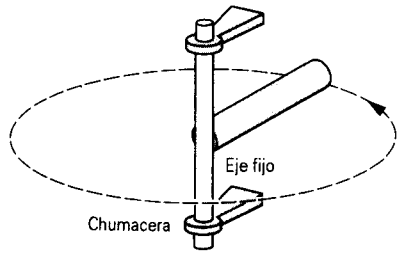


Figura 21 Pregunta 3.

- Suponga que una barra uniforme descansa en una posición vertical sobre una superficie de fricción despreciable. Entonces se le da a la barra un golpe horizontal en su extremo inferior. Describa el movimiento del centro de masa de la barra en su extremo superior.
- Si el aparato de la figura 5 se ancla al piso de una gran nave espacial que se halle flotando en una región carente de gravedad, ¿de qué manera, si existe alguna, afectaría esta acción al experimento?
- Un automóvil con impulsión en las ruedas traseras acelera rápidamente desde el reposo. El conductor observa que el

- automóvil “levanta la nariz”. ¿Por qué sucede esto? Se comportaría de modo diferente un automóvil con impulsión en las ruedas delanteras?
- Una saeta gira en su vuelo de modo que resulte tangente a la trayectoria del vuelo en todo momento. Sin embargo, una pelota de fútbol americano (arrojada con un giro considerable con respecto a su eje largo) no lo hace así. ¿Por qué existe diferencia en el comportamiento de una y otra?
 - Un pasador lanza una pelota de fútbol americano que vuela en espiral hacia el receptor. ¿Es su ímpetu angular constante, o casi constante? Distinga entre los casos en que la pelota se bambolea y en los que no lo hace.
 - ¿Puede usted sugerir una teoría sencilla que explique la estabilidad de una bicicleta en movimiento? Usted debe explicar por qué es mucho más difícil mantener el equilibrio sobre una bicicleta que esté en reposo que sobre una que esté en marcha. (Véase “The Stability of the Bicycle”, por David E. H. Jones, *Physics Today*, abril de 1970, pág. 34.)
 - ¿Por qué una barra larga le ayuda a un equilibrista que camine por un cable a mantener el equilibrio?
 - Usted está caminando a lo largo de un riel angosto y comienza a perder el equilibrio. Si comenzara a caer hacia la derecha, ¿de qué modo deberá hacer girar su cuerpo para recuperar el equilibrio? Explique.
 - Los pernos de montaje que fijan los motores de los aviones de propulsión a chorro al bastidor estructural del mismo están diseñados para partirse en dos instantáneamente si el motor (que gira rápidamente) se agarrotara en forma súbita debido a alguna avería. ¿Por qué se emplean estos “fusibles estructurales”?
 - Un jugador de hockey enojado arroja un palo a lo largo del hielo. El palo gira en torno a su centro de masa al deslizarse hasta que llega al reposo por la acción de la fricción. Su movimiento de rotación se detiene en el preciso momento en que su centro de masa llega al reposo, ni antes ni después. Explique por qué.
 - Cuando la velocidad angular ω de un objeto aumenta, su momento angular puede o no aumentar también. Dé un ejemplo en que lo haga y otro en que no lo haga así.
 - Un estudiante está de pie sobre una mesa que gira con una velocidad angular ω mientras sostiene dos pesas iguales

- con sus brazos estirados. Sin mover nada más, deja caer las dos pesas. ¿Qué cambio, si lo hay, existe en la velocidad angular del estudiante? ¿Se conserva el ímpetu angular? Explique sus respuestas.
- El helicóptero levanta el vuelo girando sus aspas. ¿Por qué no gira el fuselaje del helicóptero en la dirección opuesta?
 - Un aeroplano monomotor debe ser “equilibrado” para que vuele a nivel. (El arreglo consiste en elevar un alerón y bajar el opuesto.) ¿Por qué es esto necesario? ¿Es esto necesario en un aeroplano bimotor en circunstancias normales?
 - La hélice de un aeroplano gira en sentido de las manecillas del reloj vista la hélice desde atrás. Cuando el piloto enfila hacia arriba después de un clavado empinado, decide aplicar el timón de dirección hacia la izquierda en el fondo del clavado para mantener su rumbo. Explique.
 - Muchos de los grandes ríos fluyen hacia el ecuador. ¿Qué efecto produce el sedimento que acarrearán hacia el mar sobre la rotación de la Tierra?
 - Si toda la población mundial se concentrará en la Atlántida, afectaría esto la duración del día? Si así fuera, ¿en qué forma afectaría?
 - Una tornamesa circular gira con velocidad angular constante en torno a un eje vertical. No existe fricción ni una torca que la impulse. Una cazuela circular descansa sobre la tornamesa y gira con ella; véase la figura 22. El fondo de la cazuela está cubierto con una capa de hielo de espesor uniforme, la cual está, por supuesto, girando también con la cazuela. El hielo se funde pero de la cacerola no escapa ni una gota de agua. ¿Es ahora la velocidad angular más grande, la misma, o menor que la rapidez original? Dé las razones de su respuesta.

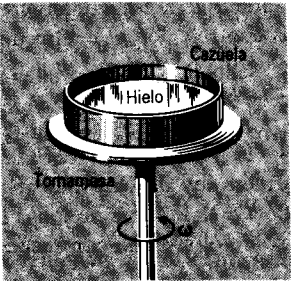


Figura 22 Pregunta 21.

- La figura 23a muestra a un acróbata lanzado hacia arriba por un trampolín con un ímpetu angular nulo. ¿Puede el acróbata, maniobrando su cuerpo, caer sobre su espalda como en la figura 23b? Como dato interesante, el 38% de los entrenadores de clavados a quienes se les preguntó y el 34% de un grupo de físicos seleccionados dieron la respuesta incorrecta. ¿Qué piensa usted? (Para un estudio completo, véase “Do Springboard Divers Violate Angular Momentum Conservation?”, por Cliff Frohlich, *American Journal of Physics*, julio de 1979, pág. 583.)

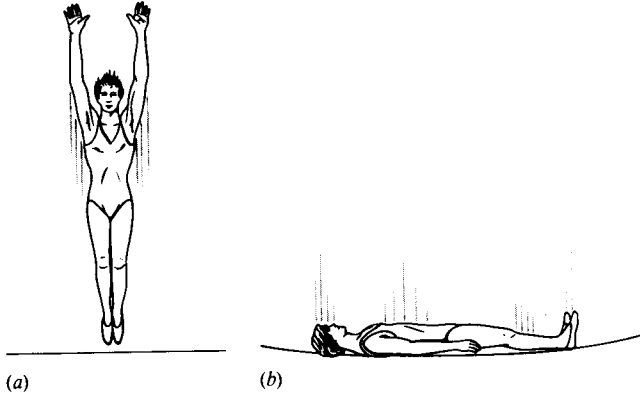


Figura 23 Pregunta 22.

- Explique exactamente, en términos del ímpetu angular y de la inercia de rotación, cómo se “genera” un balanceo en la posición de sentado en un columpio. (Véase “How to Get the Playground Swing Going: A First Lesson in The Mechanics of Rotation”, por Jearl Walker, *Scientific American*, marzo de 1989, pág. 106.)
- ¿Puede usted columpiarse de forma que logre girar en un círculo completo, moviéndose totalmente alrededor del soporte de un columpio? Suponga (si lo desea) que el asiento del columpio está unido a su soporte por una barra rígida en lugar de una cuerda o una cadena. Explique su respuesta.
- Una tornamesa circular gira libremente en torno a un eje vertical. No existe fricción en el eje de rotación. (a) Un bicho, inicialmente en el centro de la tornamesa, camina hacia el borde y se detiene. ¿Cómo cambia el ímpetu angular del sistema (tornamesa + bicho)? ¿Cómo cambia la velocidad angular de la tornamesa? (b) Si el bicho se cae del borde de la tornamesa (sin brincar), ¿cómo cambiará la velocidad angular de la tornamesa?
- Una rueda giratoria de gran masa puede ser utilizada para producir un efecto estabilizador sobre un buque. Si está montada con su eje de rotación en ángulo recto con la cubierta del buque, ¿cuál será su efecto cuando el buque tienda a bambolearse de un lado a otro?
- Si el trompo de la figura 18 no estuviese girando, se caería. Si su ímpetu angular de giro es grande comparado con el cambio causado por la torca aplicada, el trompo entraría en precesión. ¿Qué pasa entre tanto, cuando el trompo gira lentamente?
- Un Tippy-Top, con una sección de una superficie esférica de radio grande sobre un extremo y una espiga para girar sobre el extremo opuesto, descansará sobre su superficie esférica sin girar pero deslizándose hacia un lado después de girar, de modo que se quede parado sobre la espiga. Explique. (Véase “The Tippy-Top”, por George D. Freier, *The Physics Teacher*, enero de 1967, pág. 36.) Si usted no tiene a la mano un Tippy-Top, use un huevo duro; el comportamiento de “pararse sobre una punta” del huevo al girar se sigue más fácilmente si se pone una marca de tinta en el extremo “puntiagudo” del huevo.

PROBLEMAS

Sección 13-1 Ímpetu angular de una partícula

1. Si se nos dan r , p , y θ , podemos calcular el ímpetu angular de una partícula a partir de la ecuación 2. Sin embargo, a veces se nos dan en su lugar las componentes (x, y, z) de $\mathbf{r}$ y (v_x, v_y, v_z) de $\mathbf{v}$. (a) Demuestre que las componentes de $\mathbf{L}$ a lo largo de los ejes x , y , y z están entonces dados por

$$L_x = m(yv_z - zv_y),$$

$$L_y = m(zv_x - xv_z),$$

$$L_z = m(xv_y - yv_x).$$

(b) Demuestre que si la partícula se mueve solamente en el plano xy , el vector del ímpetu angular resultante tiene sólo una componente z . (Sugerencia: véase la ecuación 17 del capítulo 3.)

2. Una partícula P con 2.13 kg de masa tiene una posición $\mathbf{r}$ y una velocidad $\mathbf{v}$, como se muestra en la figura 24. Sobre ella actúa la fuerza $\mathbf{F}$. Los tres vectores están en un plano común. Suponga que $r = 2.91$ m, $v = 4.18$ m/s, y $F = 1.88$ N. Calcule (a) el ímpetu angular de la partícula y (b) la torca, con respecto al origen, que actúa sobre la partícula. ¿Cuáles son las direcciones de estos dos vectores?
3. Demuestre que el ímpetu angular con respecto a cualquier punto de una sola partícula que se mueva a velocidad constante permanece constante durante el movimiento.
4. (a) Utilice los datos de los apéndices para calcular el ímpetu angular total de todos los planetas debido a su vuelta alrededor del Sol. (b) ¿Qué fracción de esto se asocia con el planeta Júpiter?
5. Dos partículas, cada una de masa m y velocidad v , viajan en direcciones opuestas a lo largo de líneas paralelas separadas por una distancia d . Halle una expresión para el ímpetu angular total del sistema con respecto a cualquier origen.
6. Calcule el ímpetu angular, respecto al centro de la Tierra, de una persona de 84.3 kg situada en el ecuador de la Tierra en rotación.

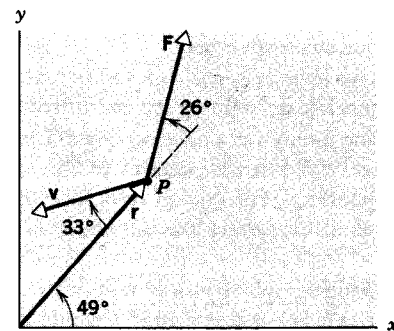


Figura 24 Problema 2.

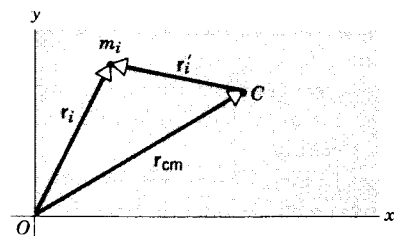


Figura 25 Problemas 7 y 8.

8. Sea $\mathbf{r}_{cm}$ el vector de posición del centro de masa C de un sistema de partículas respecto al origen O de un marco de referencia inercial, y sea $\mathbf{r}'_i$ el vector de posición de la i ésima partícula, de masa m_i , con respecto al centro de masa C . De aquí que $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{cm} + \mathbf{r}'_i$ (véase la Fig. 25). Definamos ahora que el ímpetu angular total del sistema de partículas con relación al centro de masa C sea $\mathbf{L}' = \sum \mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}'_i$, en donde $\mathbf{p}'_i = m_i d\mathbf{r}'_i/dt$. (a) Demuestre que $\mathbf{p}'_i = m_i d\mathbf{r}_i/dt - m_i d\mathbf{r}_{cm}/dt = \mathbf{p}_i - m_i \mathbf{v}_{cm}$. (b) Demuestre después que $d\mathbf{L}'/dt = \sum \mathbf{r}'_i \times d\mathbf{p}'_i/dt$. (c) Combine los resultados de (a) y (b) y, usando la definición del centro de masa y la tercera ley de Newton, demuestre que $\tau'_{ext} = d\mathbf{L}'/dt$, donde τ'_{ext} es la suma de todas las torcas externas que actúan sobre el sistema con respecto a su centro de masa.

Sección 13-3 Ímpetu angular y velocidad angular

9. La integral con respecto al tiempo de una torca se llama *impulso angular*. (a) A partir de $\tau = dL/dt$, demuestre que el impulso angular resultante es igual al cambio en ímpetu angular. Esto es la analogía de rotación de la relación impulso-ímpetu lineal. (b) Para una rotación alrededor de un eje fijo, demuestre que

$$\int \tau dt = \bar{F}r(\Delta t) = I(\omega_f - \omega_i),$$

donde r es el brazo del momento de la fuerza, $\bar{F}$ es el valor promedio de la fuerza durante el tiempo que actúa sobre el objeto, y ω_i y ω_f son las velocidades angulares del objeto justo antes y justo después de actuar la fuerza.

10. Un disco abrasivo con una inercia de rotación de $1.22 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ está unido a un taladro eléctrico cuyo motor desarrolla una torca de $15.8 \text{ N} \cdot \text{m}$. Halle (a) el ímpetu angular y (b) la velocidad angular del disco 33.0 ms después de haber encendido el motor.
11. Una rueda de 24.7 cm, que se mueve inicialmente a razón de 43.3 m/s, rueda hasta detenerse en 225 m. Calcule (a) su aceleración lineal y (b) su aceleración angular. (c) La inercia de rotación de la rueda es $0.155 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; calcule la torca ejercida por la fricción sobre la rueda al rodar.
12. Dos ruedas, A y B , están conectadas por una banda como en la figura 26. El radio de B es tres veces el radio de A . ¿Cuál sería la razón de las inercias de rotación I_A/I_B si (a) ambas ruedas tienen los mismos ímpetus angulares y (b) las dos ruedas tienen la misma energía cinética de rotación? Suponga que la banda no se patina.

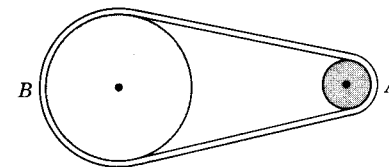


Figura 26 Problema 12.

13. Demuestre que $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ para el sistema de dos partículas de la figura 7.
14. Usando los datos de los apéndices, halle el ímpetu angular del giro de la Tierra respecto a su propio eje de rotación. Suponga que la Tierra es una esfera uniforme.
15. El ímpetu angular de un volante que tiene una inercia de rotación de $0.142 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ disminuye de 3.07 a $0.788 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ en 1.53 s. (a) Halle la torca promedio que actúa sobre el volante durante este periodo. (b) Suponiendo una aceleración angular uniforme, ¿en qué ángulo habrá girado el volante? (c) ¿Cuánto trabajo se efectuó sobre el volante? (d) ¿Cuánta potencia promedio fue suministrada por el volante?
16. La figura 27 muestra un cuerpo rígido simétrico que gira en torno a un eje fijo. El origen de coordenadas ha sido fijado por conveniencia en el centro de masa. Probar, sumando las contribuciones hechas al ímpetu angular por todos los elementos de masa m_i en que está dividido el cuerpo, que $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$, donde $\mathbf{L}$ es el ímpetu angular total.
17. Un polín tiene una masa de 4.42 kg y una longitud de 1.23 m. Inicialmente está en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción y es golpeado perpendicularmente por un disco de hule que le imparte una fuerza impulsiva horizontal de $12.8 \text{ N} \cdot \text{s}$ de impulso a una distancia de 46.4 cm del centro. Determine el movimiento subsiguiente del polín.
18. Un cilindro rueda hacia abajo por un plano inclinado en un ángulo θ . Demuestre, por aplicación directa de la ecuación 8 ($\sum \tau_{ext} = dL/dt$), que la aceleración de su centro de masa es $\frac{2}{3}g \sin \theta$. Compare este método con el empleado en el problema muestra 8 del capítulo 12.
19. Para hacer que una bola de billar ruede sin deslizarse desde el reposo, el taco debe golpear a la bola no en el centro

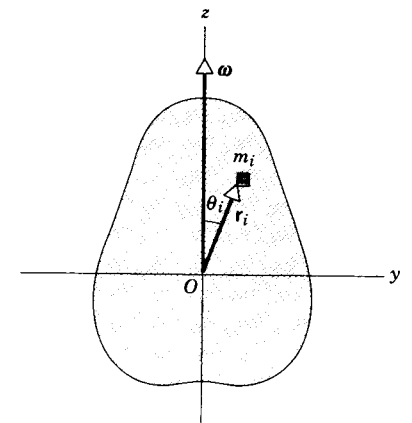


Figura 27 Problema 16.

(esto es, no a una altura sobre la mesa igual al radio R de la bola) sino exactamente a una altura de $2R/5$ sobre el centro. Demuestre este resultado. [Véase Arnold Sommerfeld, *Mechanics, Volume I of Lectures on Theoretical Physics*, Academic Press, Orlando (edición en rústica de 1964), págs. 158 a 161, para un suplemento sobre la mecánica de los billares.]

20. El eje del cilindro de la figura 28 está fijo y el cilindro está inicialmente en reposo. El bloque de masa M se está moviendo inicialmente hacia la derecha sin fricción con una velocidad v_1 . Pasa sobre el cilindro a la posición señalada en líneas punteadas. Cuando hace contacto por primera vez con el cilindro, se desliza sobre el cilindro, pero la fricción es suficientemente grande como para que el deslizamiento cese antes de que M pierda contacto con el cilindro. El cilindro tiene un radio R y una inercia de rotación I . Halle la velocidad final v_2 en términos de v_1 , M , I , y R . Esto puede hacerse más fácilmente usando la relación entre el impulso y el cambio de ímpetu.

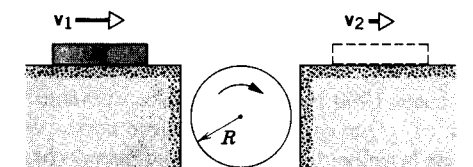


Figura 28 Problema 20.

21. Un barrote de longitud L y masa M está sobre una mesa horizontal sin fricción sobre la cual puede moverse libremente de cualquier modo. Un disco de hule de los usados en el hockey sobre hielo de masa m , que se mueve como se muestra en la figura 29 con velocidad v , choca elásticamente con el barrote. (a) ¿Qué cantidades se conservan en la colisión? (b) ¿Cuál debe ser la masa m del disco de hule con el fin de que permanezca en reposo inmediatamente después de la colisión?
22. Dos cilindros que tienen radios R_1 y R_2 e inercias de rotación I_1 e I_2 , respectivamente, están soportados por ejes

perpendiculares al plano de la figura 30. El cilindro grande gira inicialmente a una velocidad angular ω_0 . El cilindro pequeño se mueve hacia la derecha hasta que toca al cilindro grande y comienza a girar a causa de la fuerza de fricción entre los dos. Al cabo de un tiempo, el resbalamiento cesa, y los dos cilindros giran a razones constantes en direcciones opuestas. Halle la velocidad angular final ω_2 del cilindro pequeño en términos de I_1 , I_2 , R_1 , R_2 , y ω_0 . (Sugerencia: No se conserva ningún ímpetu angular ni la energía cinética. Aplíquese la ecuación del impulso angular a cada cilindro. Véase el problema 9.)

23. Una bola de billar, inicialmente en reposo, recibe de un taco un impulso rápido. El taco es sostenido horizontalmente a una distancia h sobre la línea central como en la figura 31. La bola deja el taco a una velocidad v_0 , y, a causa de una "inglesa hacia el frente", adquiere una velocidad final de $9v_0/7$. Demuestre que $h = 4R/5$, donde R es el radio de la bola.
24. En el problema 23, imaginemos que F va a ser aplicada debajo de la línea central. (a) Demuestre que es imposible, con esta "inglesa en reversa", reducir la velocidad hacia adelante a cero, sin que sobrevenga un rodamiento, a no ser que $h = R$. (b) Demuestre que es imposible darle a la bola una velocidad hacia atrás, a no ser que F tenga una componente vertical hacia abajo.
25. Un bolichista lanza una bola de boliche de radio $R = 11.0$ cm a lo largo de la pista con una velocidad inicial $v_0 = 8.50$ m/s. La bola se lanza de forma que patina durante cierta distancia antes de que comience a rodar. No gira en absoluto cuando toca primero la pista, siendo su movimiento una traslación pura. El coeficiente de fricción cinética entre la bola y la pista es de 0.210. (a) ¿Durante qué lapso de tiempo patina la bola? (Sugerencia: Mientras que la bola patine, su velocidad v disminuye y su velocidad angular ω aumenta; el patinaje cesa cuando $v = R\omega$). (b) ¿A lo largo de qué distancia patina la bola? (c) ¿Cuántas vueltas da la bola antes de que comience a rodar? (d) ¿Con qué velocidad se mueve cuando empieza a rodar?

Sección 13-4 Conservación del ímpetu angular

26. Las observaciones astronómicas demuestran que desde 1870 hasta 1900 la longitud del día aumentó unos 6.0×10^{-3} s. (a) ¿Qué cambio fraccionario correspondiente resultó en la velocidad angular de la Tierra? (b) Supóngase que la causa de este cambio haya sido un desplazamiento del material fundido en el núcleo de la Tierra. ¿Qué cambio fraccionario resultante en la inercia de rotación de la Tierra podría considerarse para la respuesta a la parte (a)?
27. Supongamos que al Sol se le agote el combustible nuclear y súbitamente se colapse para formar la así llamada estrella enana blanca, con un diámetro igual al de la Tierra. Suponiendo que no hubiera pérdida de masa, ¿cuál sería entonces el nuevo periodo de rotación del Sol, que actualmente es de unos 25 días? Supóngase que el Sol y la estrella enana blanca sean esferas uniformes.
28. Una persona está de pie sobre una plataforma sin fricción que gira con una velocidad angular de 1.22 rev/s; sus brazos están en cruz y en cada mano sostiene una pesa. Con sus manos en esta posición la inercia de rotación total de la

persona, junto con las pesas, y la plataforma es de $6.13 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Si al mover las pesas la persona disminuye la inercia de rotación a $1.97 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, (a) ¿cuál es la velocidad angular resultante de la plataforma y (b) ¿cuál es la razón entre la nueva energía cinética y la energía cinética original?

29. En una clase demostrativa, se montan unos carriles de un tren de juguete sobre una rueda grande que puede girar libremente con fricción despreciable en torno a un eje vertical; véase la figura 32. Sobre los carriles se coloca un tren de juguete de masa m y, con el sistema inicialmente en reposo, se conecta la potencia eléctrica. El trenecito llega a una velocidad uniforme v respecto a los carriles. ¿Cuál es la velocidad angular ω de la rueda, si su masa es M y su radio R ? (Desprecie la masa de los rayos de la rueda.)

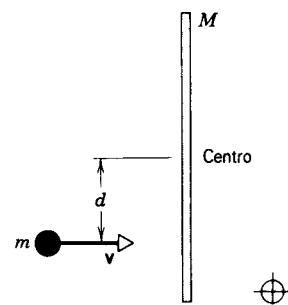


Figura 29 Problema 21.

30. El rotor de un motor eléctrico tiene una inercia rotatoria $I_m = 2.47 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ respecto a su eje central. El motor está montado paralelo al eje de una sonda espacial que se mueve con una inercia rotatoria $I_p = 12.6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ en torno a su eje. Calcule el número de vueltas necesarias para hacer girar a la sonda a través de 25.0° en torno a su eje.

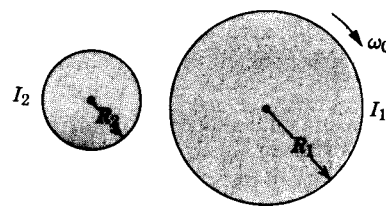


Figura 30 Problema 22.

31. Una rueda con una inercia rotatoria de $1.27 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ está girando a una velocidad angular de 824 rev/min en una flecha cuya inercia rotatoria es despreciable. Una segunda rueda, inicialmente en reposo y con una inercia rotatoria de $4.85 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ se acopla de repente a la misma flecha. (a) ¿Cuál es la velocidad angular de la combinación resultante de la flecha y las dos ruedas? (b) ¿Qué fracción de la energía cinética original se pierde?
32. Con centro y rayos de masa despreciable, cierta rueda de bicicleta tiene un rin delgado de 36.3 cm de radio y 3.66 kg de masa; puede girar sobre su eje con una fricción despreciable. Un hombre sostiene a la rueda sobre su cabeza con

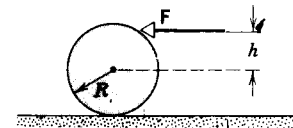


Figura 31 Problema 23.

el eje vertical mientras está de pie sobre una tornamesa con libertad para girar sin fricción; la rueda gira en el sentido de las manecillas del reloj, vista desde arriba, con una velocidad angular de 57.7 rad/s, y la tornamesa está inicialmente en reposo. La inercia de rotación de rueda + hombre + tornamesa respecto al eje de rotación común es de $2.88 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. (a) La mano del hombre detiene súbitamente la rotación de la rueda (relativa a la tornamesa). Determine la velocidad angular (magnitud y dirección) resultante del sistema. (b) Se repite el experimento introduciendo una fricción notable sobre el eje de la rueda, la cual, comenzando desde la misma velocidad angular inicial (57.7 rad/s), llega gradualmente al reposo (en relación a la tornamesa) mientras el hombre mantiene a la rueda como se describió antes. (La tornamesa puede todavía girar libremente sin fricción.) Describa qué le sucede al sistema, dando tanta información cuantitativa como los datos lo permitan.

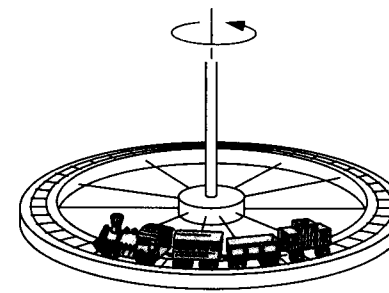


Figura 32 Problema 29.

33. Una joven de 50.6 kg de masa está de pie sobre el borde de un tiiovivo sin fricción de 827 kg de masa y 3.72 m de radio, que no se mueve. Lanza una piedra de 1.13 kg en una dirección horizontal tangente al borde exterior del tiiovivo. La velocidad de la piedra, en relación al suelo, es de 7.82 m/s. Calcule (a) la velocidad angular del tiiovivo y (b) la velocidad lineal de la joven después de haber lanzado la piedra. Suponga que el tiiovivo es un disco uniforme.
34. En un parque de diversiones hay un pequeño tiiovivo de 1.22 m de radio y 176 kg de masa. El radio de giro (véase el problema 11 del capítulo 12) es de 91.6 cm. Un niño de 44.3 kg de masa corre a una velocidad de 2.92 m/s tangente al borde del tiiovivo cuando está en reposo y luego salta sobre él. Desprecie la fricción entre las chumaceras y la flecha del tiiovivo y halle la rapidez angular del tiiovivo y el niño.
35. Un disco plano uniforme de masa M y radio R gira en torno a un eje horizontal que pasa por su centro con una veloci-

dad angular ω_0 . (a) ¿Cuál es su energía cinética? ¿Cuál es su ímpetu angular? (b) Del borde del disco se rompe en cierto momento un trozo de masa m , de modo que el trozo se eleva verticalmente sobre el punto en que se rompió (Fig. 33). ¿A qué altura de ese punto llegará antes de que comience a caer? (c) ¿Cuál es la velocidad angular final del disco roto?

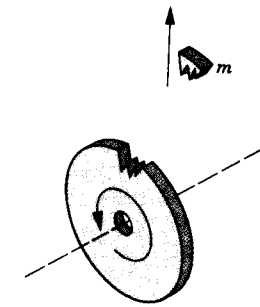


Figura 33 Problema 35.

36. Una cucaracha, de masa m , corre en contra de las manecillas del reloj por el borde de un plato circular giratorio montado sobre un eje vertical de radio R e inercia de rotación I que tiene chumaceras sin fricción. La velocidad de la cucaracha (con relación a la Tierra) es v , mientras que el plato gira en sentido de las manecillas del reloj a una velocidad angular ω . La cucaracha encuentra un miga de pan sobre el borde y, por supuesto, se detiene. (a) Halle la velocidad angular del plato después de haberse detenido la cucaracha. (b) ¿Cuánta energía cinética se ha perdido, si esto ha sucedido?
37. Una partícula se proyecta horizontalmente en el interior de un tazón hemisférico sin fricción de radio r , que se mantiene en reposo (Fig. 34). Deseamos hallar la velocidad inicial v_0 requerida para que la partícula llegue a la parte superior del tazón. Halle v_0 en función de θ_0 , la posición angular inicial de la partícula. (Sugerencia: Emplee los principios de la conservación.)

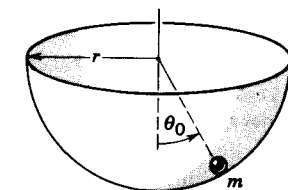
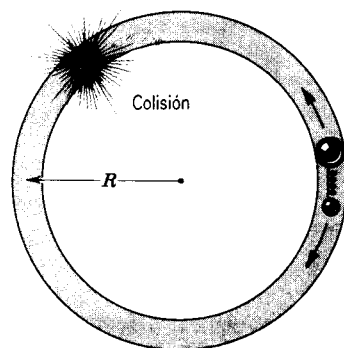


Figura 34 Problema 37.

38. En una gran pista circular horizontal sin fricción, de radio R , se encuentran dos pequeñas bolas de masas m y M , que pueden deslizarse libremente sobre la pista. Entre las dos bolas hay un resorte comprimido el cual, sin embargo, no se halla unido a las bolas. Las dos bolas se mantienen juntas por medio de un cordón. (a) Si el cordón se rompe,

el resorte comprimido (que se supone sin masa) dispara a las dos bolas en direcciones opuestas; el propio resorte queda atrás. Las bolas chocan cuando se encuentran de nuevo sobre la pista (Fig. 35). En dónde tiene lugar esta colisión? Expresé la respuesta en términos del ángulo, en radianes, a través del cual se desplaza la bola M . (b) La energía potencial inicialmente almacenada en el resorte era U_0 . Halle el tiempo que transcurre desde que el cordón se rompe hasta que sucede la colisión. (c) Suponiendo que la colisión sea perfectamente elástica y de frente, ¿en dónde chocarían las bolas nuevamente después de la primera colisión?



Figuras 35 Problema 38.

39. Dos patinadores, cada uno de 51.2 kg de masa, se aproximan uno al otro a lo largo de trayectorias paralelas separadas por 2.92 m. Tienen velocidades iguales y opuestas de 1.38 m/s. El primer patinador lleva en sus manos una barra ligera larga de 2.92 m de longitud, y el segundo patinador toma el extremo de ésta al pasar; véase la figura 36. Suponga que el hielo carece de fricción. (a) Describa cuantitativamente el movimiento de los patinadores después de que están unidos por la barra. (b) Ayudándose al jalar la barra, los patinadores reducen su separación a 0.940 m. Halle su velocidad angular entonces. (c) Calcule la energía cinética del sistema en las partes (a) y (b). ¿De dónde proviene el cambio?
40. Si las capas de hielo polar de la Tierra se fundiesen y el agua retornase a los océanos, éstos serían unos 30 m más profundos. ¿Qué efecto tendría esto sobre la rotación de la Tierra? Haga una estimación del cambio resultante en la longitud del día. (Se ha expresado la preocupación de que el calentamiento de la atmósfera como consecuencia de la contaminación industrial pudiera provocar que las capas de hielo se fundan.)
41. Se cree que la Tierra se formó hace unos 4500 millones de años, como una esfera de densidad aproximadamente uniforme. Poco tiempo después, el calor de la desintegración de elementos radiactivos hizo que gran parte de la Tierra se derritiera. Esto favoreció que el material más pesado se hundiera hacia el centro de la Tierra, formando el núcleo. Hoy día podemos representar a la Tierra con un núcleo de 3570 km de radio y 10.3 g/cm^3 de densidad rodeado por una capa de 4.50 g/cm^3 de densidad que

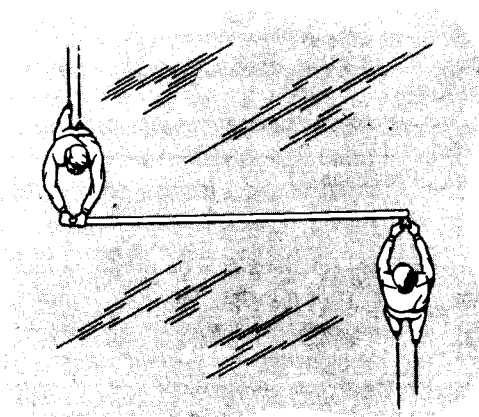


Figura 36 Problema 39.

se extiende hasta la superficie del planeta (6370 km de radio). Desconocemos la corteza de la Tierra. Calcule el cambio fraccionario en la longitud del día debido a la formación del núcleo.

Sección 13-5 El trompo

42. Un trompo gira a razón de 28.6 rev/s en torno a un eje que forma un ángulo de 34.0° con la vertical. Su masa es de 492 g y su inercia rotatoria es de $5.12 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. El centro de masa está a 3.88 cm del punto de pivoteo. El giro es en sentido de las manecillas del reloj visto desde arriba. Halle la magnitud (en rev/s) y la dirección de la velocidad angular de la precesión.
43. Un giroscopio consta de un disco rotatorio con un radio de 48.7 cm convenientemente montado en el punto central de un eje de 12.2 cm de longitud de modo que pueda girar y entrar en precesión libremente. Su velocidad de giro es de 975 rev/min. La masa del disco es de 1.14 kg y la masa del eje es de 130 g. Halle el tiempo requerido para una precesión si el eje está sujeto en un extremo y es horizontal.

Sección 13-6 Cuantización del ímpetu angular

44. En 1913, Niels Bohr postuló que el ímpetu angular de cualquier sistema rotatorio mecánico con una inercia de rotación I está cuantizado. Esto es,

$$L = I\omega = n(h/2\pi),$$

donde L es el ímpetu angular y n es cualquier entero positivo o cero. (a) Demuestre que este postulado restringe a la energía cinética que el sistema rotatorio puede tener a un grupo de valores discretos: es decir, la energía está cuantizada; halle una expresión para la energía. (b) Consideremos al *rotador rígido*, consistente en una partícula de masa m obligada a girar en un círculo de radio R . ¿Con qué velocidades angulares podría girar la partícula si el postulado fuese correcto? ¿Qué valores de energía cinética podría tener? (c) Trace un diagrama energía-nivel como el de la figura 37, indicando cómo varía el espaciamiento entre los niveles de energía al aumentar n . Ciertas

DEPARTAMENTO DE FÍSICA
DOCUMENTACIÓN Y BIBLIOTECA
MONTEVIDEO - URUGUAY

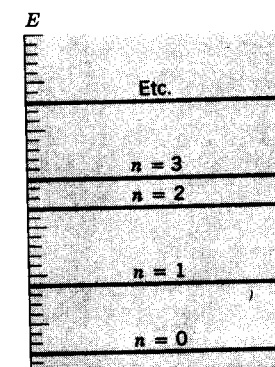


Figura 37 Problema 44.

moléculas biatómicas de baja energía se comportan como un rotador rígido.

45. (a) Supongamos que el electrón se mueve en una órbita circular en torno al protón de un átomo de hidrógeno. La fuerza centrípeta sobre el electrón es proporcionada por una fuerza eléctrica $e^2/4\pi\epsilon_0 r^2$, donde e es la magnitud de la carga de un electrón y de un protón, r es el radio de la órbita, y ϵ_0 es una constante. Demuestre que el radio de la órbita es

$$r = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m v^2}$$

en donde m es la masa del electrón y v es su velocidad. (b) Suponga ahora que el ímpetu angular del electrón respecto al protón sólo puede tener valores que sean múltiplos enteros n de $h/2\pi$, donde h es la constante de Planck. Demuestre que las únicas órbitas posibles del electrón son aquellas con un radio

$$r = \frac{nh}{2\pi m v}.$$

(c) Combine estos resultados para eliminar a v y demuestre que las únicas órbitas que son consistentes con ambos requerimientos tienen radios

$$r = \frac{n^2 \epsilon_0 h^2}{\pi m e^2}.$$

De aquí que los radios permitidos sean proporcionales al cuadrado de los enteros $n = 1, 2, 3$, etc. Cuando $n = 1$, r es el más pequeño y tiene el valor de $0.529 \times 10^{-10} \text{ m}$.

Proyecto para la computadora

46. Consideremos dos volantes que estén montados sobre la misma flecha pero libres de girar independientemente. El volante 1, que inicialmente gira a 100 rad/s, tiene una inercia rotatoria de $2.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. El volante 2, que está inicialmente en reposo, tiene una inercia rotatoria de $1.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Al deslizar un volante a lo largo de la flecha ambos volantes entran en contacto entre sí, cara contra

cara. Las torcas entre sí y llegan a alcanzar la misma velocidad angular. (a) Suponga que no actúan otras torcas que las de cada volante entre sí y utilice el principio de la conservación del ímpetu angular para hallar la velocidad angular final de los volantes.

Si la torca de cada volante sobre el otro puede ser calculada, se puede usar una computadora para seguir a los volantes hasta que lleguen a la misma velocidad. Suponga que la torca del volante 2 sobre el volante 1 está dada por $\tau_1 = -0.20(\omega_1 - \omega_2)$, donde ω_1 es la velocidad angular del volante 1 y ω_2 es la velocidad angular del volante 2. Aquí τ_1 está en $\text{N} \cdot \text{m}$ y las velocidades angulares están en rad/s. La torca del volante 1 sobre el volante 2 es $\tau_2 = +0.20(\omega_1 - \omega_2)$. Las torcas continúan actuando hasta que los volantes tengan la misma velocidad angular, y luego se anulan. Mientras están interactuando, el volante 1 obedece a $\tau_1 = I_1 \alpha_1$ y el volante 2 obedece a $\tau_2 = I_2 \alpha_2$. Estas ecuaciones son matemáticamente similares a las ecuaciones de la segunda ley de Newton y pueden ser integradas numéricamente de la manera descrita en la sección 6-6 y en los proyectos para la computadora al final del capítulo 6. Considere intervalos de tiempo de duración Δt y suponga que el volante 1 tiene una posición angular θ_{1b} y una velocidad angular ω_{1b} al principio de un intervalo. Entonces, su posición angular y su velocidad angular al final del intervalo pueden aproximarse por $\theta_{1e} = \theta_{1b} + \omega_{1b} \Delta t$ y $\omega_{1e} = \omega_{1b} + \alpha_{1b} \Delta t = \omega_{1b} + (\tau_{1b}/I_1) \Delta t$, donde τ_{1b} es la torca al principio del intervalo. Se tienen ecuaciones similares para el volante 2. Cuanto más pequeño sea Δt mejor será la aproximación.

(b) Escriba un programa de computación o diseñe una hoja de cálculo para hallar la velocidad angular de los volantes al final de cada segundo desde $t = 0$ hasta $t = 25 \text{ s}$. Use un intervalo de integración de 0.001 s. Trace las velocidades angulares en función del tiempo en la misma gráfica, luego usar la gráfica o la lista de valores para hallar las velocidades angulares finales y compare el resultado con el valor obtenido en la parte (a).

(c) Para ver la influencia de una torca externa suponga que la torca que actúa sobre el volante 1 está dada por $\tau_1 = -4.0 - 0.20(\omega_1 - \omega_2)$ y la torca que actúa sobre el volante 2 es $\tau_2 = +0.20(\omega_1 - \omega_2)$, donde las torcas están en $\text{N} \cdot \text{m}$ y las velocidades angulares en rad/s. Esto representa una torca externa de $-4.0 \text{ N} \cdot \text{m}$. Use el programa de computación para hallar las velocidades angulares de los volantes y el ímpetu angular total en cada 1 s desde $t = 0$ hasta $t = 25 \text{ s}$. De nuevo, use un intervalo de integración de 0.001 s. Grafique las velocidades angulares en función del tiempo. Puesto que $\tau_{\text{ext}} = dL_{\text{total}}/dt$, la torca externa debería producir un cambio en el ímpetu angular total de $\Delta L = \tau_{\text{ext}} \Delta t = -4.0 \times 25 = -100 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ durante los primeros 25 s. ¿Concuerdan sus resultados? ¿Cuál volante sufre el cambio (comparado con el caso de una torca externa nula); o queda el cambio compartido?

(d) La velocidad angular final no depende de los detalles de la torca que cada volante ejerce sobre el otro. ¿Qué depende de las torcas?

CAPÍTULO 14

EQUILIBRIO DE LOS CUERPOS RÍGIDOS

Las torres que soportan un puente colgante deben ser lo suficientemente fuertes como para que no se desplomen bajo el peso del puente y su carga de tránsito; el tren de aterrizaje de un aeroplano no debe romperse si el piloto realiza un mal aterrizaje; una silla no debe derrumbarse ni volcarse cuando nos sentemos en ella. En todos esos problemas el diseñador se preocupa de que estas estructuras supuestamente rígidas realmente permanezcan rígidas bajo las fuerzas y las torcas asociadas que actúan sobre ellas.

En esta clase de problemas debemos plantearnos dos preguntas: (1) ¿Qué fuerzas y torcas actúan sobre el cuerpo supuestamente rígido? (2) Teniendo en cuenta su diseño y los materiales empleados, ¿permanecerá rígido el cuerpo bajo la acción de estas fuerzas y torcas? En este capítulo nos ocuparemos a fondo de la primera pregunta. Para responder a la segunda, debemos estudiar con gran detalle las propiedades de los materiales. Queda fuera del propósito de este libro tratar este tema exhaustivamente; así, en la última sección de este capítulo ofrecemos una breve exposición.

14-1 CONDICIONES DE EQUILIBRIO

Se dice que un cuerpo rígido, como puede ser una silla, un puente, o un edificio, está en *equilibrio mecánico* si, visto desde un marco de referencia inercial, tanto el *ímpetu lineal* $\mathbf{P}$ como el *ímpetu angular* $\mathbf{L}$ del cuerpo rígido tienen un valor constante. De manera equivalente, podríamos decir que tanto la aceleración lineal $\mathbf{a}_{cm}$ de su centro de masa como la aceleración angular α respecto a cualquier eje fijo en el marco de referencia son cero.

Esta definición del equilibrio mecánico no requiere que el cuerpo esté en reposo; esto es, $\mathbf{P}$ y $\mathbf{L}$ no tienen necesariamente el valor constante de cero. Si son cero (o, lo que es lo mismo, si la velocidad del centro de masa $\mathbf{v}_{cm}$ y la velocidad angular ω respecto a cualquier eje en el marco son ambas cero), entonces estamos ante una situación de *equilibrio estático*.

En este capítulo buscamos cuáles son las restricciones que deben imponerse a las fuerzas y a las torcas que actúan sobre un cuerpo para crear una condición de equilibrio. Nos concentraremos en los casos de equilibrio estático, si

bien, como veremos, las mismas restricciones son aplicables tanto si el equilibrio es estático como si no lo es.

El movimiento de traslación del centro de masa de un cuerpo rígido se rige por la ecuación 27 del capítulo 9,

$$\sum \mathbf{F}_{ext} = \frac{d\mathbf{P}}{dt},$$

en la que $\sum \mathbf{F}_{ext}$ es la suma de todas las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo. Si $\mathbf{P}$ tiene un valor constante, incluso cero, debemos tener que $d\mathbf{P}/dt = 0$. Así pues, la primera condición del equilibrio es que *la suma vectorial de todas las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo debe ser cero*, o sea

$$\sum \mathbf{F}_{ext} = 0. \quad (1)$$

Esta ecuación vectorial es equivalente a tres ecuaciones escalares:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0, \quad (2)$$

donde, por conveniencia, hemos suprimido el subíndice "ext" de $\mathbf{F}_{ext}$. Las ecuaciones 1 y 2 postulan que la suma

de las componentes de las fuerzas externas a lo largo de cada una de tres direcciones mutuamente perpendiculares es cero.

El movimiento rotatorio de un cuerpo rígido está regido por la ecuación 8 del capítulo 13, es decir,

$$\sum \tau_{\text{ext}} = \frac{dL}{dt},$$

donde $\sum \tau_{\text{ext}}$ es la suma de todas las torcas externas que actúan sobre el cuerpo. Si el ímpetu angular L tiene cualquier valor constante, incluso cero, debemos tener que $dL/dt = 0$. Por tanto, la segunda condición del equilibrio es que la suma vectorial de todas las torcas externas que actúan sobre el cuerpo debe ser cero, o sea,

$$\sum \tau_{\text{ext}} = 0. \quad (3)$$

Esta ecuación vectorial puede expresarse como tres ecuaciones escalares (nuevamente suprimiendo el subíndice "ext"):

$$\sum \tau_x = 0, \quad \sum \tau_y = 0, \quad \sum \tau_z = 0, \quad (4)$$

que postulan que, en el equilibrio, la suma de las componentes de las torcas que actúan sobre un cuerpo, a lo largo de cada una de tres direcciones mutuamente perpendiculares, es cero.

La segunda condición del equilibrio es independiente de la elección del origen y de los ejes de coordenadas que se usen para calcular las componentes de las torcas. Si la torca neta es cero, entonces sus componentes son cero para cualquier elección de los ejes x , y , y z . Además, para un cuerpo en equilibrio, la elección del origen para calcular las torcas es irrelevante y puede hacerse según convenga; si $\tau = 0$ con respecto a un origen O en particular, entonces es cero con respecto a cualquier otro punto en el marco de referencia de un cuerpo en equilibrio.

Probemos este último postulado. Supongamos que se aplican N fuerzas externas sobre el objeto. Respecto al origen O , la fuerza $\mathbf{F}_1$ se ejerce en un punto ubicado en $\mathbf{r}_1$, la fuerza $\mathbf{F}_2$ en $\mathbf{r}_2$, y así sucesivamente. La torca neta con respecto a O es, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \tau_O &= \tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_N \\ &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{r}_N \times \mathbf{F}_N. \end{aligned} \quad (5)$$

Supongamos que un punto P está situado en el desplazamiento $\mathbf{r}_P$ con respecto a O (Fig. 1). El punto de aplicación de $\mathbf{F}_1$, con respecto a P , es $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_P)$. La torca con respecto a P es

$$\begin{aligned} \tau_P &= (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_P) \times \mathbf{F}_1 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_P) \times \mathbf{F}_2 \\ &\quad + \cdots + (\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_P) \times \mathbf{F}_N \\ &= [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{r}_N \times \mathbf{F}_N] \\ &\quad - [\mathbf{r}_P \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_P \times \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{r}_P \times \mathbf{F}_N]. \end{aligned}$$

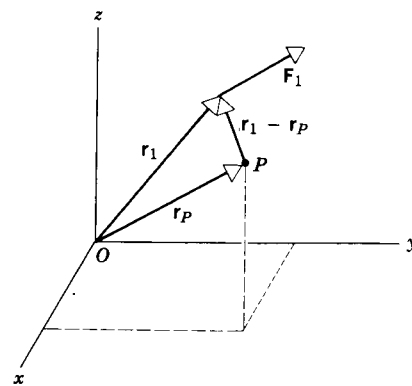


Figura 1 La fuerza $\mathbf{F}_1$ es una de las N fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido (no mostrado). El vector $\mathbf{r}_1$ sitúa al punto de aplicación de $\mathbf{F}_1$ con relación a O y se usa para calcular la torca de $\mathbf{F}_1$ con respecto a O . El vector $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_P$ se usa para calcular la torca de $\mathbf{F}_1$ con respecto a P .

El primer grupo de términos entre corchetes da τ_O de acuerdo con la ecuación 5. Podemos reescribir el segundo grupo suprimiendo el factor constante de $\mathbf{r}_P$:

$$\begin{aligned} \tau_P &= \tau_O - [\mathbf{r}_P \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_N)] \\ &= \tau_O - \left[\mathbf{r}_P \times \left(\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} \right) \right] \\ &= \tau_O, \end{aligned}$$

donde llevamos a cabo el último paso porque $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$ para un cuerpo en equilibrio de traslación. Entonces, la torca con respecto a dos puntos cualesquiera tiene el mismo valor cuando el cuerpo está en equilibrio de traslación.

A menudo tratamos con problemas en que todas las fuerzas están en un plano. En este caso las seis condiciones de las ecuaciones 2 y 4 se reducen a tres. Resolvemos las fuerzas en dos componentes:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad (6)$$

y, si calculamos las torcas con respecto a un punto que también esté en el plano xy , todas las torcas deben estar en la dirección perpendicular al plano xy . En este caso tenemos

$$\sum \tau_z = 0. \quad (7)$$

Nos limitaremos, sobre todo, a problemas en un plano para simplificar los cálculos; esta condición no impone ninguna restricción fundamental a la aplicación de los principios generales del equilibrio.

14-2 EL CENTRO DE GRAVEDAD

Una de las fuerzas que se encuentran en la dinámica del cuerpo rígido es la fuerza de la gravedad, la cual es

$$\sum \mathbf{F} = \sum m_i \mathbf{g}. \quad (8)$$

Puesto que hemos supuesto que $\mathbf{g}$ tiene el mismo valor para cada partícula del cuerpo, podemos sacar el factor $\mathbf{g}$ de la suma de la ecuación 8, lo cual da

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{g} \sum m_i = M\mathbf{g}. \quad (9)$$

Esto comprueba la primera de las afirmaciones hechas anteriormente acerca de que podemos reemplazar a la fuerza resultante de la gravedad que actúa sobre todo el cuerpo por la fuerza única $M\mathbf{g}$.

Apliquemos ahora la condición de la torca, ecuación 3, tomando las torcas respecto al punto arbitrario O , como se muestra en la figura 2. El vector $\mathbf{r}_i$ localiza a la partícula de masa m_i con relación a este origen. La torca neta en torno a este punto debida a la gravedad que actúa sobre todas las partículas es

$$\sum \tau = \sum (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{g}) = \sum (m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{g}), \quad (10)$$

donde el último paso se toma introduciendo al escalar m_i dentro de la suma. Una vez más usamos la constancia de $\mathbf{g}$ para sacarla de la suma, teniendo cuidado de no cambiar el orden de los vectores $\mathbf{r}_i$ y $\mathbf{g}$ de modo que el signo del producto cruz no cambie. Según la ecuación 12 del capítulo 9, la suma restante, $\sum m_i \mathbf{r}_i$ es precisamente $M\mathbf{r}_{\text{cm}}$, donde $\mathbf{r}_{\text{cm}}$ es el vector que sitúa al centro de masa del cuerpo con relación al origen O . En estos dos pasos, podemos expresar la ecuación 10 así:

$$\sum \tau = \left(\sum m_i \mathbf{r}_i \right) \times \mathbf{g} = M\mathbf{r}_{\text{cm}} \times \mathbf{g} = \mathbf{r}_{\text{cm}} \times M\mathbf{g}. \quad (11)$$

La torca resultante sobre el cuerpo es, entonces, igual a la torca que sería producida por la fuerza única $M\mathbf{g}$ que actúa en el centro de masa del cuerpo, y entonces el centro de gravedad (cg) coincide con el centro de masa, lo cual comprueba la segunda afirmación hecha anteriormente. Un corolario útil de la ecuación 11 es que la torca debida a la gravedad en torno al centro de masa de un cuerpo es cero.

¿En qué condiciones estará en equilibrio un cuerpo en la gravedad de la Tierra? Las ecuaciones 9 y 11 demuestran que, si aplicamos una fuerza única $\mathbf{F}'$ hacia arriba de magnitud $M\mathbf{g}$ en el centro de masa, entonces tanto la fuerza neta como la torca neta serán cero, y nuestras condiciones de equilibrio se cumplirán. Sin embargo, también es cierto que el cuerpo estará en equilibrio si la fuerza $\mathbf{F}'$ hacia arriba está aplicada en cualquier punto de una línea vertical que pase por el centro de masa. La torca neta es cero en este caso, porque $M\mathbf{g}$ y $\mathbf{F}'$ ($= -M\mathbf{g}$) tienen la misma línea de acción. Por lo tanto, podemos equilibrar un objeto aplicando una fuerza vertical $\mathbf{F}'$ no sólo en el centro de masa, sino también en cualquier punto situado directamente encima o debajo del centro de masa.

Podemos emplear esta propiedad para hallar el centro de masa de un objeto extenso. Consideremos un cuerpo

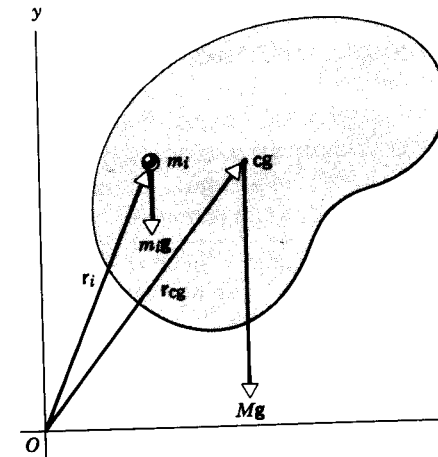


Figura 2 Cada partícula de un cuerpo, como el representado con masa m_i , experimenta una fuerza gravitatoria como $m_i \mathbf{g}$. Todo el peso del cuerpo, aunque distribuido en todo su volumen como la suma de las fuerzas gravitatorias sobre todas sus partículas, puede ser reemplazado por una fuerza única de magnitud $M\mathbf{g}$ que actúa en el centro de gravedad. Si el campo gravitatorio es uniforme (esto es, el mismo para todas las partículas), el centro de gravedad coincide con el centro de masa, y entonces $\mathbf{r}_{\text{cm}}$ es el mismo que $\mathbf{r}_{\text{cg}}$.

responsable del peso del cuerpo. Con autoridad (y sin justificación), hemos representado a fuerza sobre un cuerpo de masa M por medio de un vector aislado $M\mathbf{g}$ que actuaba en el centro de masa del cuerpo. Aquí justificaremos este paso y estudiaremos las condiciones bajo las cuales es válida.

El peso de un cuerpo extenso es en realidad la resultante de un gran número de fuerzas, cada una de ellas debida a la gravedad, que actúa sobre cada una de las partículas del cuerpo. Esto es, podemos reemplazar al vector suma de las fuerzas gravitatorias de todas las partículas de un cuerpo con una sola fuerza: el peso. Además, la resultante neta de las torcas gravitatorias correspondientes sobre todas las partículas puede ser reemplazada por la torca debida a esa fuerza única si imaginamos que actúa en un punto del cuerpo llamado el *centro de gravedad*.

Si la aceleración gravitatoria $\mathbf{g}$ tiene el mismo valor en todos los puntos del cuerpo, lo cual es así en todos los casos prácticos de interés, ocurren entonces dos simplificaciones: (1) el peso es igual a $M\mathbf{g}$, y (2) el centro de gravedad coincide con el centro de masa. Comprobemos estos dos resultados.

Imaginemos al cuerpo de masa M dividido en un gran número de partículas. La fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra sobre la i ésima partícula de masa m_i es $m_i \mathbf{g}$. Esta fuerza se halla dirigida hacia el centro de la Tierra. La fuerza neta sobre todo el objeto debida a la gravedad es la suma sobre todas y cada una de las partículas, o sea

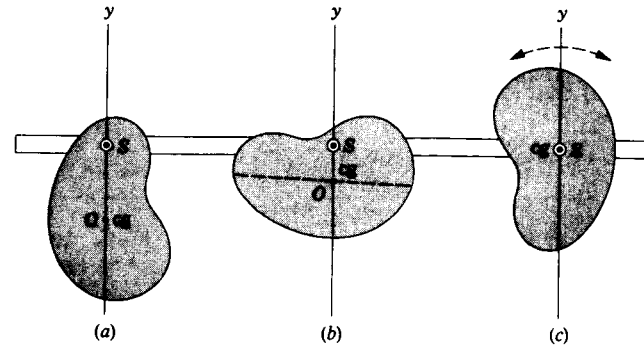


Figura 3 Un cuerpo suspendido de un punto arbitrario S , como en (a) y (b), estará en equilibrio estable sólo si su centro de gravedad (cg) cuelga verticalmente bajo su punto de suspensión S . La línea punteada en (b) representa a la línea vertical en (a), demostrando que el centro de gravedad puede ser localizado al suspender al cuerpo de dos puntos diferentes en forma sucesiva. (c) Si un cuerpo es suspendido en su centro de gravedad, está en equilibrio sin importar cuál sea su orientación.

de forma arbitraria suspendido de un punto S (Fig. 3). El punto de soporte, que ejerce una fuerza hacia arriba $\mathbf{F}' = -M\mathbf{g}$, debe estar sobre una línea vertical con el centro de masa. Si trazamos una línea vertical a través de S , entonces sabemos que el centro de masa debe estar en algún punto de la línea. Podemos repetir el procedimiento tras una nueva elección del punto S , como en la figura 3b, y hallaremos una segunda línea que debe contener el centro de masa. El centro de masa debe, por lo tanto, estar en la intersección de las dos líneas.

Si suspendemos el objeto del centro de masa, como en la figura 3c, el cuerpo estará en equilibrio sin importar cuál sea su orientación. Podemos voltearlo a nuestro antojo y permanecerá en equilibrio. Esto ilustra el corolario de la ecuación 11: la torca debida a la gravedad es cero con respecto al centro de masa.

En esta sección hemos usado de manera indistinta los términos “centro de masa” y “centro de gravedad”. El centro de masa se define así para cualquier cuerpo y puede calcularse, según los métodos descritos en el capítulo 9, a partir del tamaño y la forma del cuerpo. Por otra parte, el centro de gravedad se define únicamente para los cuerpos situados dentro de un campo gravitatorio. Para calcular el centro de gravedad, debemos conocer no sólo los detalles geométricos del cuerpo, sino también la variación de g sobre el cuerpo. Si g no es constante sobre el cuerpo, entonces el centro de gravedad y el centro de masa no coinciden, y g no puede suprimirse de las sumas en las ecuaciones 8 y 10. Consideremos una barra uniforme como la que se muestra en la figura 4, cuyo eje está inclinado en cierto ángulo diferente de cero respecto a la horizontal. El centro de masa C está el centro geométrico de la barra. Si el eje de la barra fuese horizontal, el centro

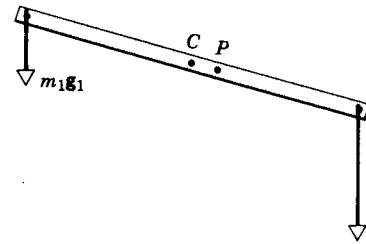


Figura 4 Una barra uniforme en un campo gravitatorio no uniforme. El centro de gravedad está en P , el cual no coincide con el centro de masa C .

de gravedad P coincidiría con el centro de masa; esto es, una fuerza única hacia arriba $\mathbf{F}'$ (de igual magnitud a $M\mathbf{g}$) situada en C mantendría a la barra en equilibrio. Cuando el eje no es horizontal, esto no sucede así. Puesto que g disminuye ligeramente con la distancia desde la Tierra, la partícula N en el extremo más bajo de la barra experimenta una atracción gravitatoria mayor que una partícula idéntica 1 en el extremo más alto. Para compensar la tendencia resultante de la barra a girar en sentido horario (o de las manecillas del reloj) en torno a C , el centro de gravedad P (el punto de aplicación de la fuerza equilibrante hacia arriba) debe estar situado un poco más abajo de C . Al cambiar el ángulo con la horizontal, cambiará la posición de P . Además, si movemos la barra a un lugar en donde g tenga un valor diferente, la relación entre P y C para un ángulo de inclinación dado será diferente. Así, el centro de gravedad puede, en general, depender de la orientación del objeto, así como del campo gravitatorio local. Para una barra de un metro, inclinada en un ángulo de 45° en las cercanías de la superficie de la Tierra, la distancia entre el centro de masa y el centro de gravedad es de alrededor 18 nm, mucho más pequeña que la precisión con la que normalmente se trabaja en los problemas de equilibrio y, por lo tanto, completamente insignificante. En problemas de equilibrio, podemos suponer con seguridad que el centro de gravedad y el centro de masa coinciden.

14-3 EJEMPLOS DE EQUILIBRIO

Al aplicar las condiciones de equilibrio (fuerza resultante nula y torca resultante nula respecto a cualquier punto), podemos aclarar y simplificar el procedimiento como sigue.

En primer lugar, trazamos una frontera imaginaria alrededor del sistema en estudio. Esto ayuda a ver claramente a qué cuerpo o a qué sistema de cuerpos estamos aplicando las leyes de equilibrio. A este proceso se le llama *aislar al sistema*.

En segundo lugar, trazamos los vectores que representan la magnitud, la dirección, y el punto de aplicación

de todas las fuerzas *externas*. Una fuerza externa es aquella que actúa desde el exterior de la frontera que hayamos trazado en primer lugar. Ejemplos de fuerzas externas que se encuentran a menudo son las fuerzas gravitatorias y las fuerzas ejercidas por cuerdas, alambres, barras, y vigas que cruzan la frontera. Nótese que sólo es necesario considerar a las fuerzas externas que actúan sobre el sistema; todas las fuerzas internas se cancelan entre sí en pares.

Existen ciertos casos en que la dirección de una fuerza pudiera no ser obvia. Para determinar la dirección de cierta fuerza, tracemos un corte imaginario a través del miembro que ejerce la fuerza en el punto en que cruza la frontera. Si los extremos de este corte tienden a separarse, la fuerza actúa hacia afuera. En caso de duda, conviene elegir la dirección de la manera arbitraria. Un valor negativo de una fuerza en la solución significa que la fuerza actúa en dirección opuesta contraria a la que habríamos supuesto.

En tercer lugar, elegimos un sistema de coordenadas conveniente a lo largo de cuyos ejes resolvemos las fuerzas externas antes de aplicar la primera condición de equilibrio (Ecs. 1 ó 2). La meta, aquí, consiste en simplificar los cálculos. El sistema de coordenadas preferible es, por lo general, aquel que haga mínimo el número de fuerzas que deban ser resueltas en componentes.

En cuarto lugar, elegimos un sistema de coordenadas conveniente a lo largo de cuyos ejes resolvemos las torcas externas antes de aplicar la segunda condición de equilibrio (Ecs. 3 ó 4). Una vez más, la meta consiste en simplificar los cálculos, y podemos usar sistemas de coordenadas diferentes al aplicar las dos condiciones para el equilibrio estático si esto demuestra ser conveniente. Por ejemplo, al calcular las torcas con respecto a un punto a través del cual actúen varias fuerzas se eliminan las fuerzas de la ecuación de la torca.

En el equilibrio, las componentes de la torca que resulta de todas las fuerzas externas debe ser cero en torno a *cualquier* eje. Las torcas internas se cancelarán en pares y no necesitan ser consideradas. Seguimos la misma convención que en capítulos anteriores para el signo algebraico de la torca en torno a un eje en particular: tomamos a una torca como positiva si por sí misma produjera una rotación antihoraria en torno al eje.

Problema muestra 1 Una viga uniforme de longitud L cuya masa m es de 1.8 kg descansa sobre sus extremos en dos básculas digitales, como en la figura 5a. Un bloque cuya masa M es de 2.7 kg reposa sobre la viga, con su centro situado a un cuarto de L a partir del extremo izquierdo de la viga. ¿Qué lectura arrojarán las básculas?

Solución Elegimos como nuestro sistema a la viga y al bloque juntos. La figura 5b es un diagrama de cuerpo libre de este sistema, que muestra todas las fuerzas externas que actúan sobre el sistema. El peso de la viga, mg , actúa hacia abajo en su

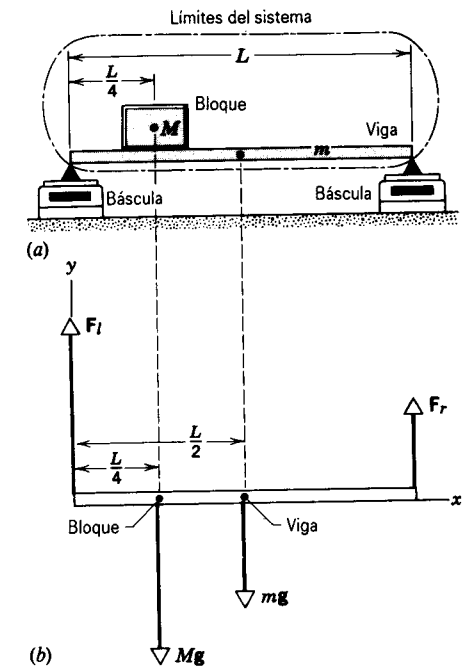


Figura 5 Problema muestra 1. (a) Una viga de masa m soporta a un bloque de masa M . Las básculas digitales muestran las fuerzas verticales ejercidas en los dos extremos de la viga. (b) Diagrama de cuerpo libre que muestra las fuerzas que actúan sobre el sistema consistente en viga + bloque.

centro de masa, el cual está en su centro geométrico, puesto que la viga es uniforme. De igual manera, Mg , el peso del bloque, actúa hacia abajo en su centro de masa. Las básculas empujan hacia arriba en los extremos de la viga con fuerzas F_l y F_r . Lo que buscamos son las magnitudes de estas últimas dos fuerzas, reflejadas en las lecturas que dan las básculas.

Nuestro sistema está en equilibrio estático, de modo que se aplica la ecuación del equilibrio de las fuerzas (Ec. 6) y la ecuación del equilibrio de las torcas (Ec. 7). Resolveremos este problema de dos modos equivalentes.

1. Primera solución. Las fuerzas no tienen componentes x , y por lo tanto la condición de que $\sum F_x = 0$ no nos proporciona información alguna. Para las componentes y , tenemos

$$\sum F_y = F_l + F_r - Mg - mg = 0. \quad (12)$$

Existen dos fuerzas desconocidas (F_l y F_r) pero no podemos obtenerlas por separado porque sólo tenemos (hasta ahora) una ecuación. Por fortuna, tenemos otra ecuación a la mano, es decir, la ecuación 7, la ecuación de equilibrio de las torcas.

Podemos aplicar la ecuación 7 a cualquier eje que forme un ángulo recto con el plano de la figura 5. Elijamos un eje que pase por el extremo izquierdo de la viga, de modo que desaparezca la incógnita F_l de la ecuación de la torca. Tendremos entonces, de la ecuación 7,

$$\sum \tau_z = (F_r)(L) - (mg)(L/2) - (Mg)(L/4) = 0, \quad (13)$$

o sea

$$F_r = (g/4)(M + 2m) \\ = (1/4)(9.8 \text{ m/s}^2)[2.7 \text{ kg} + 2(1.8 \text{ kg})] = 15 \text{ N}.$$

Nótese cómo nuestra elección elimina a la fuerza F_i de la ecuación de la torca y nos permite resolver directamente para la otra fuerza. Si nos hubiéramos inclinado por tomar las torcas respecto a cualquier punto arbitrario, habríamos obtenido una ecuación en la que F_i y F_r podrían resolverse simultáneamente con la ecuación 12. Nuestra elección de ejes nos ayuda a simplificar el álgebra un tanto pero, por supuesto, de ninguna manera cambia la solución final.

Si sustituimos el valor de F_r en la ecuación 12 y resolvemos para F_i , hallamos que

$$F_i = (M + m)g - F_r \\ = (2.7 \text{ kg} + 1.8 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) - 15 \text{ N} = 29 \text{ N}.$$

Nótese que la altura del centro de masa del bloque no interviene en la solución de este problema. ¿Es esto físicamente razonable?

2. Segunda solución. Como comprobación, resolvamos este problema de un modo diferente, aplicando la ecuación de equilibrio de las torcas en torno a dos ejes diferentes. Al elegir a un eje que pase por el extremo izquierdo de la viga, como lo hicimos anteriormente, hallamos la solución $F_r = 15 \text{ N}$.

Para un segundo eje que pase por el extremo derecho de la viga, la ecuación 7 nos da

$$\sum \tau_z = (F_r)(0) - (F_i)(L) + (mg)(L/2) + (Mg)(3L/4) = 0. \quad (14)$$

Resolviendo para F_i , hallamos

$$F_i = (g/4)(3M + 2m) \\ = (1/4)(9.8 \text{ m/s}^2)[3(2.7 \text{ kg}) + 2(1.8 \text{ kg})] = 29 \text{ N},$$

de acuerdo con nuestro resultado anterior. Nótese que la longitud de la viga no interviene explícitamente en este problema.

La solución para las dos incógnitas en este problema (F_i y F_r) exige dos ecuaciones independientes. En este segundo método, nuestras dos ecuaciones (Ecs. 13 y 14) provienen de las dos ecuaciones de las torcas; la ecuación de la fuerza (Ec. 12) no proporciona una información independiente. De hecho, como puede demostrarse, al restar las dos ecuaciones de las torcas nos da la ecuación de la fuerza.

Problema muestra 2 Un bolichista sostiene en la palma de la mano una bola de boliche cuya masa M es de 7.2 kg. Como lo muestra la figura 6a, el brazo está vertical y el antebrazo está horizontal. ¿Qué fuerzas deberán ejercer el músculo bíceps y la estructura ósea del brazo sobre el antebrazo? El antebrazo y la mano juntos tienen una masa m de 1.8 kg, y las dimensiones necesarias son $d = 4.0 \text{ cm}$, $D = 15 \text{ cm}$, y $L = 33 \text{ cm}$.

Solución Nuestro sistema consta del antebrazo y la bola de boliche juntos. La figura 6b muestra un diagrama de cuerpo libre. Las fuerzas desconocidas son T , la fuerza ejercida por el músculo bíceps, y F , la fuerza ejercida por el brazo sobre el antebrazo. Al igual que en el problema muestra 1, todas las fuerzas son verticales.

Partiendo de la ecuación 6, $\sum F_y = 0$, hallamos

$$\sum F_y = T - F - mg - Mg = 0. \quad (15)$$

Aplicando la ecuación 7 respecto a un eje que pase por O y tomando las rotaciones en sentido antihorario como positivas, obtenemos

$$\sum \tau_z = (T)(d) + (F)(0) - (mg)(D) - (Mg)(L) = 0. \quad (16)$$

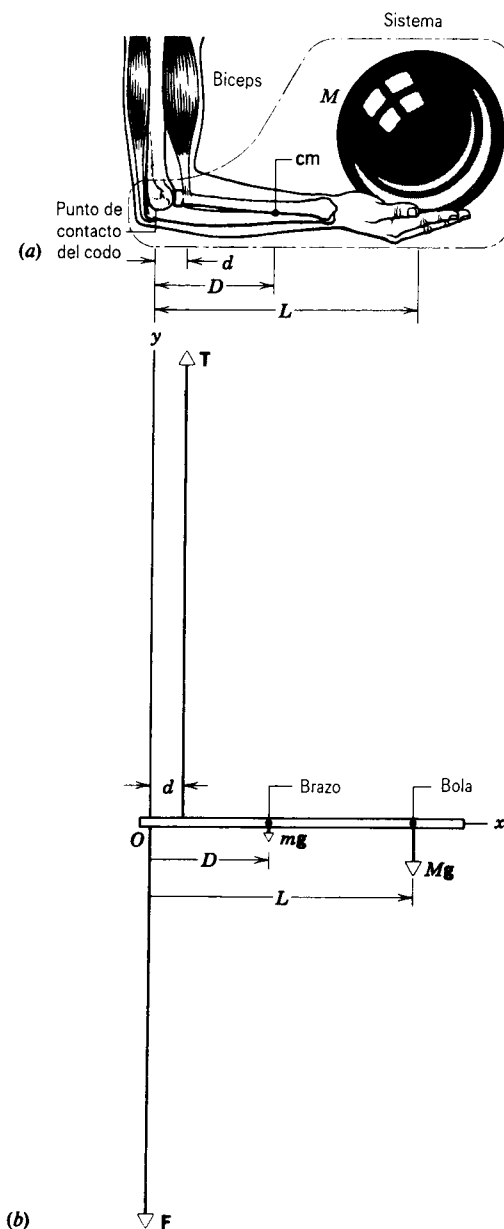
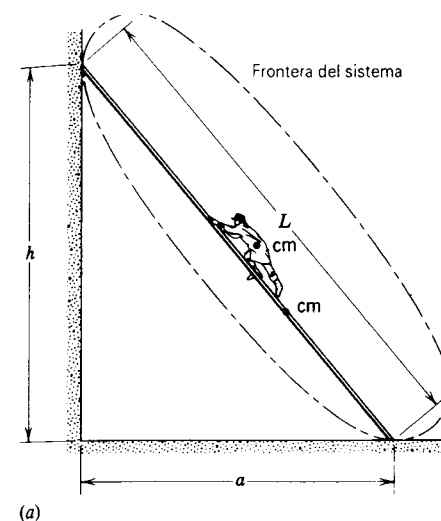


Figura 6 Problema muestra 2. (a) Una mano sostiene una bola de boliche. Se marca la frontera del sistema. (b) Diagrama de cuerpo libre, que muestra las fuerzas que actúan. Los vectores están a escala, mostrando las potentes fuerzas ejercidas por el músculo bíceps y por el brazo en la articulación del codo (punto O).

Al elegir que nuestro eje pase por el punto O , hemos eliminado la variable F de esta ecuación. La ecuación 16, resuelta para T , nos da

$$T = g \frac{mD + ML}{d} \\ = (9.8 \text{ m/s}^2) \frac{(1.8 \text{ kg})(15 \text{ cm}) + (7.2 \text{ kg})(33 \text{ cm})}{4.0 \text{ cm}} \\ = 648 \text{ N} = 146 \text{ lb}.$$



Entonces el músculo bíceps debe jalar del antebrazo con una fuerza que sea alrededor de nueve veces más grande que el peso de la bola de boliche.

Si resolvemos la ecuación 15 para F y sustituimos en ella el valor de T dado arriba, hallamos

$$F = T - g(M + m) \\ = 648 \text{ N} - (9.8 \text{ m/s}^2)(7.2 \text{ kg} + 1.8 \text{ kg}) \\ = 560 \text{ N} = 126 \text{ lb}.$$

La fuerza F es también grande, siendo alrededor de ocho veces el peso de la bola de biliar.

Problema muestra 3 Una escalera cuya longitud L es de 12 m y cuya masa m es de 45 kg descansa contra una pared. Su extremo superior está a una distancia h de 9.3 m del suelo, como vemos en la figura 7a. El centro de masa de la escalera está a un tercio del camino hacia arriba. Un bombero cuya masa M es de 72 kg sube por la escalera. Suponga que la pared, pero no el suelo, carece de fricción. ¿Qué fuerzas ejercen sobre la escalera la pared y el suelo?

Solución La figura 7b muestra un diagrama de cuerpo libre. La pared ejerce una fuerza horizontal F_w sobre la escalera; no puede ejercer fuerza vertical alguna porque se supone que el punto de contacto entre la pared y la escalera está libre de fricción. El suelo ejerce una fuerza sobre la escalera con una componente horizontal f debida a la fricción y una componente vertical N , la fuerza normal. Elegimos los ejes de coordenadas como se muestra, con el origen O en el punto en que la escalera se apoya en el suelo. La distancia a desde la pared al pie de la escalera se halla fácilmente a partir de

$$a = \sqrt{L^2 - h^2} = \sqrt{(12 \text{ m})^2 - (9.3 \text{ m})^2} = 7.6 \text{ m}.$$

Partiendo de la ecuación 6, la ecuación de equilibrio de las fuerzas, tenemos que, respectivamente,

$$\sum F_x = F_w - f = 0 \quad (17)$$

$$\sum F_y = N - Mg - mg = 0. \quad (18)$$

La ecuación 18 da

Figura 7 Problemas muestra 3 y 4. (a) Un bombero está a medio camino de una escalera apoyada contra una pared sin fricción. (b) Diagrama de cuerpo libre, que muestra (a escala) las fuerzas que actúan.

$$N = g(M + m) \\ = (9.8 \text{ m/s}^2)(72 \text{ kg} + 45 \text{ kg}) = 1150 \text{ N}.$$

Partiendo de la ecuación 7, la ecuación del equilibrio de las torcas, tenemos, tomando un eje que pase por O , el punto de contacto de la escalera con el suelo,

$$\sum \tau_z = -(F_w)(h) + (Mg)(a/2) + (mg)(a/3) = 0. \quad (19)$$

Esta acertada elección de la posición de los ejes elimina dos variables, f y N , de la ecuación de equilibrio de las torcas. Podemos hallar, resolviendo la ecuación 19 para F_w ,

$$F_w = \frac{ga(M/2 + m/3)}{h} \\ = \frac{(9.8 \text{ m/s}^2)(7.6 \text{ m})[(72 \text{ kg})/2 + (45 \text{ kg})/3]}{9.3 \text{ m}} = 410 \text{ N}.$$

Partiendo de la ecuación 17 tenemos

$$f = F_w = 410 \text{ N}.$$

Problema muestra 4 En el problema muestra 3, el coeficiente de fricción estática μ_s entre la escalera y el suelo es de 0.54. ¿A qué altura puede subir el bombero antes de que la escalera empiece a deslizarse?

Solución En el problema muestra 3 hallamos que, cuando el bombero está a medio camino hacia arriba en la escalera, la fuerza normal N es 1150 N. La fuerza máxima de fricción estática es $f_{\max} = \mu_s N = (0.54)(1150 \text{ N}) = 620 \text{ N}$. La fuerza real de fricción hemos hallado en ese problema era $f = 410 \text{ N}$, que es menor que $f_{\max}$. Al continuar subiendo el bombero, f aumentará, y ocurrirá un deslizamiento cuando el bombero haya subido una distancia d a lo largo de la escalera, de modo que $f = f_{\max}$. Deseamos hallar la distancia d .

Las fuerzas que actúan tienen la misma nomenclatura que los de la figura 7. Al aplicar la ecuación 7 en torno a un eje que pase por el punto de contacto de la escalera con el suelo, tenemos

$$\sum \tau_z = -(F_w)(h) + (mg)(a/3) + (Mg)(da/L) = 0,$$

donde da/L es la distancia horizontal entre O y la línea de acción del peso Mg del bombero. Resolviendo para F_w , hallamos

$$F_w = \frac{ga}{h} \left(M \frac{d}{L} + \frac{m}{3} \right). \quad (20)$$

La ecuación 20 nos muestra que al subir el bombero por la escalera (esto es, al aumentar d), la fuerza F_w ejercida por la pared debe aumentar para que se mantenga el equilibrio. Para hallar a d en el punto de deslizamiento, debemos primero hallar a F_w .

La ecuación 6 del equilibrio de fuerzas en la dirección x nos da

$$\sum F_x = F_w - f = 0.$$

En el punto de deslizamiento, tendremos entonces que

$$F_w = f = f_{\max} = \mu_s N. \quad (21)$$

De la ecuación 6 para el equilibrio de fuerzas en la dirección y , tenemos

$$\sum F_y = N - Mg - mg = 0,$$

o sea

$$N = g(M + m). \quad (22)$$

Al combinar las ecuaciones 21 y 22, tenemos

$$F_w = \mu_s g(M + m). \quad (23)$$

Finalmente, si combinamos las ecuaciones 20 y 23 y resolvemos para d , tendremos

$$\begin{aligned} d &= L \left[\frac{\mu_s h}{a} \frac{(M + m)}{M} - \frac{m}{3M} \right] \\ &= (12 \text{ m}) \left[\frac{(0.54)(9.3 \text{ m})}{7.6 \text{ m}} \frac{(72 \text{ kg} + 45 \text{ kg})}{72 \text{ kg}} - \frac{45 \text{ kg}}{(3)(72 \text{ kg})} \right] \\ &= 10.4 \text{ m}. \end{aligned}$$

El bombero puede subir el 87% de la escalera antes de que comience a deslizarse.

¿Cuál es el coeficiente de fricción mínimo que permite que el bombero suba toda la escalera ($d = L$)? ¿Cuál es el coeficiente de fricción mínimo necesario para hacer que la escalera no se deslice antes de que el bombero comience a subir?

Problema muestra 5 Una viga uniforme de longitud $L = 3.3 \text{ m}$ y masa $m = 8.5 \text{ kg}$ está engoznada a una pared como en la figura 8a. Un alambre unido a la pared a una distancia $d = 2.1 \text{ m}$ sobre el gozne está unido al otro extremo de la viga, siendo la longitud del alambre tal que la viga forma un ángulo de $\theta = 30^\circ$ con la horizontal. Un cuerpo de masa $M = 56 \text{ kg}$ está suspendido del extremo superior de la viga. Halle la tensión en el alambre y la fuerza ejercida por el gozne sobre la viga.

Solución La figura 8b muestra todas las fuerzas externas que actúan sobre la viga, la cual hemos elegido como nuestro sistema. A causa de que dos de las fuerzas están dirigidas verticalmente hacia abajo, elegimos que nuestros ejes sean horizontal y vertical. La tensión en el alambre y la fuerza ejercida por el gozne sobre la viga están representadas por sus componentes horizontal y vertical.

Partiendo de la ecuación 6 para el equilibrio de traslación, obtenemos

$$\sum F_x = F_h - T_h = 0, \quad (24)$$

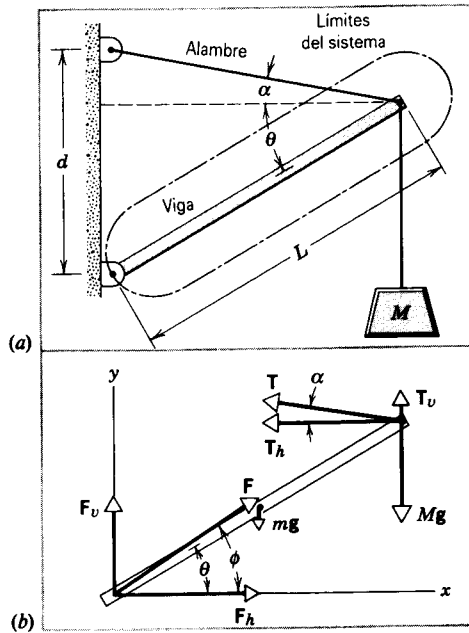


Figura 8 Problema muestra 5. (a) Una viga soportada por un gozne situado en el extremo inferior de una pared y por un alambre unido a la pared en su extremo superior. Un objeto de masa M cuelga del extremo superior de la viga.

(b) Diagrama de cuerpo libre, que muestra las fuerzas que actúan sobre la viga. El gozne ejerce una fuerza F y la tensión en el alambre proporciona una fuerza T .

y

$$\sum F_y = F_v + T_v - mg - Mg = 0. \quad (25)$$

Para aplicar la condición del equilibrio rotatorio, elegimos un eje que pase por el extremo superior de la viga. (¿Por qué?) Según la ecuación 7, tenemos entonces

$$\sum \tau_z = -F_v(L \cos \theta) + F_h(L \sin \theta) + mg\left(\frac{L}{2} \cos \theta\right) = 0,$$

o sea

$$F_v = F_h \tan \theta + \frac{mg}{2}. \quad (26)$$

Si sustituimos los valores numéricos, las ecuaciones 24 a 26 dan por resultado

$$F_h = T_h,$$

$$F_v + T_v = 632 \text{ N},$$

y

$$F_v = (0.577)F_h + 41.7 \text{ N}.$$

Observemos que tenemos cuatro incógnitas, a saber, F_v , F_h , T_v y T_h , pero sólo tres ecuaciones que las relacionen. Necesitamos otra relación entre estas cantidades si queremos resolver este problema. Esta relación final se deduce del hecho de que T_v y T_h deben de sumarse para dar un vector resultante T dirigido a lo largo del alambre. El alambre (flexible) no puede soportar una fuerza transversal a su dimensión larga. [Nótese que esto no sucede así en el caso de la viga (rígida).] De aquí que nuestra cuarta ecuación sea

$$T_v = T_h \tan \alpha, \quad (27)$$

donde $\tan \alpha = (d - L \sin \theta)/(L \cos \theta) = 0.157$, que corresponde a $\alpha = 8.9^\circ$. Así nuestra cuarta ecuación resulta ser

$$T_v = 0.157 T_h.$$

Al combinar las cuatro ecuaciones hallamos que, después de llevar a cabo el álgebra necesaria,

$$F_v = 506 \text{ N}, \quad F_h = 804 \text{ N}, \quad T_v = 126 \text{ N}, \quad T_h = 804 \text{ N}.$$

La tensión en el alambre será entonces

$$T = \sqrt{T_h^2 + T_v^2} = 814 \text{ N},$$

y la fuerza ejercida por el gozne sobre la viga es

$$F = \sqrt{F_h^2 + F_v^2} = 950 \text{ N}.$$

Nótese que tanto T como F son considerablemente más grandes que los pesos combinados de la viga y el cuerpo suspendido (632 N).

El vector F forma un ángulo con la horizontal de

$$\phi = \tan^{-1} \frac{F_v}{F_h} = 32.2^\circ.$$

Entonces, el vector de la fuerza resultante que actúa sobre la viga en el gozne no apunta a lo largo de la dirección de la viga.

En los ejemplos anteriores hemos tenido cuidado de limitar el número de fuerzas desconocidas al número de ecuaciones independientes que relacionan a las fuerzas. Cuando todas las fuerzas actúan en un plano, podemos tener solamente tres ecuaciones de equilibrio independientes, una para el equilibrio de rotación respecto a cualquier eje normal al plano, y las otras dos para el equilibrio de traslación en el plano. Sin embargo, a menudo tenemos más de tres fuerzas desconocidas. Por ejemplo, en los problemas muestra 3 y 4, si abandonamos la hipótesis artificial de una pared sin de fricción, tenemos cuatro cantidades escalares desconocidas, es decir, las componentes horizontal y vertical de la fuerza que actúa sobre la escalera y la pared, y las componentes horizontal y vertical de la fuerza que actúa sobre la escalera en el suelo. Estas fuerzas no pueden ser determinadas porque tenemos solamente tres cantidades escalares. Al asignar cualquier valor a una fuerza desconocida, pueden determinarse las otras tres fuerzas. Pero si carecemos de una base para asignar cualquier valor particular a una fuerza desconocida, es posible, matemáticamente, un número infinito de soluciones. Por lo tanto, debe ser posible hallar otra relación independiente entre las fuerzas desconocidas si esperamos resolver el problema en forma única. (En el problema muestra 5, esta última ecuación provino de una propiedad física de uno de los elementos del sistema.) El hecho de considerar torcas respecto a un segundo eje no ofrece una cuarta ecuación independiente; podemos demostrar que tal ecuación es una combinación lineal de la primera ecuación de la torca y las dos ecuaciones de las

fuerzas, y por lo tanto no contiene ninguna información nueva.

Otro ejemplo sencillo de una estructura indeterminada ocurre cuando deseamos determinar las fuerzas ejercidas por el suelo sobre cada una de las cuatro llantas de un automóvil cuando está en reposo sobre una superficie horizontal. Si suponemos que estas fuerzas son normales al suelo, tenemos cuatro cantidades escalares desconocidas. Todas las demás fuerzas, como el peso del automóvil más los pasajeros, actúan como normales al suelo. Por lo tanto, tenemos solamente tres ecuaciones independientes que nos dan las condiciones del equilibrio, una para el equilibrio de traslación en la dirección única de todas las fuerzas y dos para el equilibrio (rotatorio) con respecto a los dos ejes perpendiculares entre sí en un plano horizontal. De nuevo, la solución del problema es matemáticamente indeterminada. Una mesa de cuatro patas, con todas ellas en contacto con el piso, es un ejemplo similar.

Desde luego, puesto que existe realmente una solución única a este problema físico, debemos hallar una base física para la relación independiente adicional entre las fuerzas que nos permita resolver el problema. La dificultad desaparece cuando pensamos que las estructuras nunca son perfectamente rígidas, como lo hemos supuesto tácitamente hasta ahora. Todas las estructuras se deforman en realidad, de alguna manera. Por ejemplo, las llantas del automóvil y el suelo se deforman, como también lo hacen la escalera y la pared. Las leyes de la elasticidad y las propiedades elásticas de la estructura determinan la naturaleza de la deformación y proporcionan la relación adicional necesaria entre las cuatro fuerzas. Por lo tanto, un análisis completo requiere no solamente de las leyes de la mecánica del cuerpo rígido sino también de las leyes de la elasticidad. En la sección 14-5 consideraremos brevemente estos temas.

14-4 EQUILIBRIO ESTABLE, INESTABLE, Y NEUTRO DE LOS CUERPOS RÍGIDOS EN UN CAMPO GRAVITATORIO

En el capítulo 8 vimos que la fuerza de la gravedad es una fuerza conservativa. Para las fuerzas conservativas podemos definir una función de la energía potencial $U(x, y, z)$, donde U se relaciona con F según

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

En los puntos donde $\partial U/\partial x$ sea cero, una partícula sometida a esta fuerza conservativa estará en equilibrio de traslación en la dirección x , ya que entonces F_x es igual a cero. En forma equivalente, en los puntos en que $\partial U/\partial y$ o

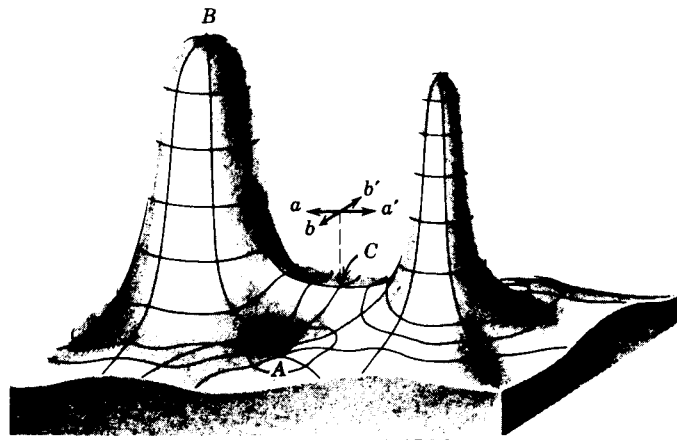


Figura 9 Una superficie con energía potencial gravitatoria. Una partícula que experimente la fuerza gravitatoria correspondiente se comportaría de modo similar a una partícula que se deslizara sin fricción sobre una superficie sólida real de esta forma. Una partícula situada en A, B, o C estaría en equilibrio. El punto A representa un equilibrio *estable*, porque una partícula que se desplace ligeramente desde A tenderá a regresar allí. El punto B representa un equilibrio *inestable*, porque una partícula que se desplace ligeramente desde B tenderá a aumentar su desplazamiento. En el punto C, una partícula que se desplace a lo largo del eje aa' tenderá a regresar a C, pero si su desplazamiento fuera a lo largo del eje bb' , tendería a aumentar su desplazamiento. El punto C se llama *punto silla*, porque la superficie de esta región tiene forma parecida a una silla de montar. El equilibrio neutro, que no se ilustra, estaría representado por una superficie horizontal plana.

$\partial U/\partial z$ sean cero, una partícula estará en equilibrio de traslación en las direcciones y y z , respectivamente. La derivada de U en un punto, y la correspondiente componente de la fuerza sobre una partícula, será cero cuando U tenga un valor extremo (máximo o mínimo) en ese punto o cuando U sea constante con respecto a la coordenada variable. Entonces la partícula puede estar en equilibrio cuando U sea máxima, mínima, o constante. Consideremos, por orden, cada una de estas tres posibilidades.

Cuando U sea un *mínimo* (el punto A de la figura 9), la partícula está en equilibrio *estable*; cualquier desplazamiento desde esta posición dará por resultado una fuerza de restitución que tiende a regresar a la partícula a la posición de equilibrio. De igual forma, podemos decir que si un cuerpo está en equilibrio estable, para que cambie su posición deberá efectuarse un trabajo sobre él por un agente externo. Esto dará por resultado un aumento en su energía potencial.

Cuando U sea un *máximo* (el punto B en la figura 9), la partícula está en equilibrio *inestable*; cualquier desplazamiento desde esta posición dará por resultado una fuerza que tiende a empujar a la partícula más allá de la posición de equilibrio. En este caso, para que cambie su posi-

ción no deberá efectuarse trabajo alguno sobre la partícula por un agente externo; el trabajo efectuado para desplazar al cuerpo lo proporciona la fuerza conservativa, dando por resultado una disminución en su energía potencial.

Cuando U sea una *constante*, la partícula está en equilibrio *neutro*. En este caso una partícula puede desplazarse ligeramente sin experimentar una fuerza, sea ésta repulsiva o de restauración.

Todas estas observaciones se aplican a partículas, esto es, al movimiento de traslación. Supongamos ahora que tratamos con un cuerpo rígido. Debemos considerar tanto el equilibrio rotatorio como el equilibrio de traslación. Sin embargo, el problema de un cuerpo rígido situado en un campo gravitatorio es particularmente sencillo, porque *puede considerarse que todas las fuerzas gravitatorias de las partículas del cuerpo rígido actúan en un punto, tanto para propósitos de traslación como para propósitos de rotación*. Para propósitos del equilibrio bajo fuerzas gravitatorias, podemos reemplazar al cuerpo rígido por una sola partícula en el centro de gravedad, cuya masa sea la del cuerpo.

Por ejemplo, consideremos un cubo en reposo sobre una de sus caras situado sobre una mesa horizontal. En la figura 10a se muestra al centro de gravedad en la sección transversal central del cubo. Proporcionemos una fuerza al cubo de modo que lo haga girar sin deslizamiento en torno a un eje a lo largo de una arista. Nótese que el centro de gravedad se eleva y que sobre el cubo se efectúa un trabajo, lo cual aumenta su energía potencial. Si se retira la fuerza, el cubo tiende a regresar a su posición original. Por lo tanto, esta posición inicial es la de un equilibrio *estable*. En términos de una partícula de masa equivalente situada en el centro de gravedad, este proceso se describe con la línea de puntos que indica la trayectoria seguida por el centro de gravedad durante este movimiento. Se ve que la partícula tiene una energía potencial mínima en la posición de equilibrio estable, como se requiere. Podemos concluir que el cuerpo rígido estará en equilibrio estable si la aplicación de cualquier fuerza puede elevar el centro de gravedad del cuerpo, pero no bajarlo.

Si se hace girar al cubo hasta que se equilibre sobre una esquina, como en la figura 10b, entonces el cubo estará de nuevo en equilibrio. Esta posición de equilibrio se considera *inestable*, pues la aplicación de una fuerza horizontal, aun la más leve, causaría que el cubo se cayera de esta posición con una disminución de su energía potencial. La partícula de masa equivalente en el centro de gravedad sigue la trayectoria punteada que se muestra. En la posición de equilibrio inestable esta partícula tiene una energía potencial máxima, como se requiere. Podemos concluir que el cuerpo rígido estará en equilibrio inestable si la aplicación de cualquier fuerza horizontal tiende a descender el centro de gravedad del cuerpo.

Un cubo en equilibrio sobre una de sus aristas puede considerarse en equilibrio inestable si se aplica una fuerza

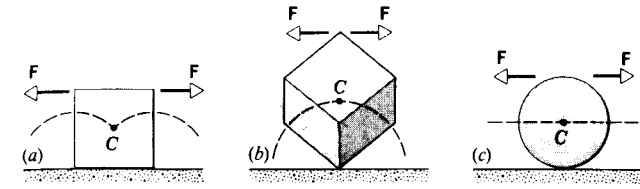


Figura 10 El equilibrio de un cuerpo extenso. (a) Un cubo que descansa sobre una mesa se halla en *equilibrio estable*, porque su centro de gravedad C se eleva cuando el cubo es volteado por una fuerza horizontal F . (b) Un cubo en equilibrio sobre una de sus esquinas se halla en *equilibrio inestable*, porque C cae cuando el cubo es ladeado por F . (c) Una esfera está en *equilibrio neutro* respecto a una fuerza horizontal, porque C no se eleva ni cae cuando se aplica F . Compárense estos criterios de equilibrio de un cuerpo extenso con los de una partícula, ilustrados en la figura 9.

horizontal perpendicular a la arista, pero está en equilibrio estable respecto a una fuerza horizontal paralela a la arista. Así, una partícula puede estar en equilibrio estable respecto a una coordenada y en equilibrio inestable respecto a otra. Esta condición recibe el nombre de *punto silla* y corresponde al punto C de la figura 9.

El equilibrio neutro de un cuerpo rígido se ilustra mediante la esfera sobre una mesa horizontal (Fig. 10c). Si la esfera se halla sometida a una fuerza horizontal, el centro de gravedad no se eleva ni descende, sino que se mueve a lo largo de la línea punteada horizontal. La energía potencial de la esfera es constante durante el desplazamiento, como lo es la de la partícula de masa equivalente situada en el centro de gravedad. El sistema no tiende a moverse en ninguna dirección cuando se retira la fuerza aplicada. Un cuerpo rígido estará en equilibrio neutro si la aplicación de cualquier fuerza horizontal no eleva ni baja el centro de gravedad del cuerpo.

¿En qué circunstancias estaría en equilibrio estable un cuerpo rígido *suspendido*? ¿Cuándo estaría en equilibrio inestable un cuerpo rígido *suspendido*, y cuándo estaría en equilibrio neutro?

14-5 ELASTICIDAD

Una mesa de tres patas es una estructura que puede analizarse mediante las técnicas de este capítulo. Las tres patas están en contacto con el suelo, el cual ejerce una fuerza normal vertical sobre cada pata. Usando una ecuación de la fuerza para el equilibrio (el peso, que actúa en el centro de gravedad, debe ser igual a la suma de las tres fuerzas normales) y dos ecuaciones de la torca (considerando torcas respecto a dos ejes perpendiculares en el plano horizontal del suelo), podemos hallar las tres fuerzas normales desconocidas a partir de tres ecuaciones.

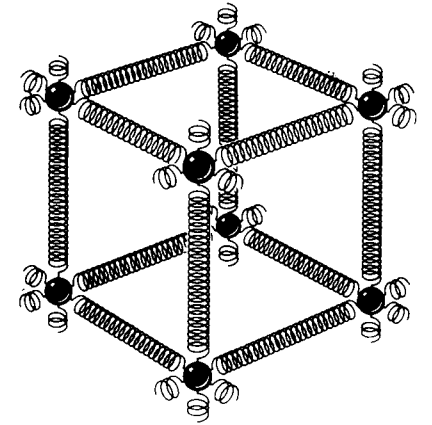


Figura 11 Los átomos de un sólido se distribuyen en estructuras de redes tridimensionales repetitivas. Las fuerzas interatómicas se hallan representadas aquí por resortes.

Una mesa de cuatro patas, sin embargo, nos ofrece cuatro incógnitas y no puede analizarse por estas técnicas sin tener más información respecto a la relación entre las fuerzas normales. Por ejemplo, supongamos que las patas sean de longitudes ligeramente diferentes. Cuando colocamos un peso muy pesado sobre la mesa, podemos comprimir a las patas en cantidades diferentes para que las cuatro patas estén en contacto con el suelo. A partir de la compresión de las patas, podemos hallar la relación faltante entre las fuerzas que nos permita resolver el problema (véase problema muestra 8).

La rigidez de los llamados cuerpos rígidos es en realidad una ilusión. Los sólidos están compuestos de átomos que no están en contacto rígido. Los átomos no tienen superficies duras que puedan compactarse apretadamente; sus nubes de electrones pueden ser moldeadas o deformadas por fuerzas externas. En un sólido, los átomos están unidos entre sí por fuerzas que se comportan de modo muy parecido a las fuerzas de los resortes. La figura 11 muestra una representación de una parte de una *red* sólida, que es la ordenación regular de los átomos como los podríamos encontrar en un cristal. Cada átomo está en equilibrio bajo la influencia de los seis resortes que lo rodean; las constantes efectivas de los resortes son muy grandes, de modo que se necesita una gran fuerza para cambiar la separación. A esto se debe la idea de rigidez que percibimos. En otros sólidos, los átomos pueden estar ordenados en filas largas más bien que en redes cúbicas; estos materiales no son sumamente rígidos, como no lo es, por ejemplo, el hule. Cuando estiramos un material así, aplicamos la fuerza suficiente para cambiar los espacios atómicos.

Todos los cuerpos "rígidos" reales son *elásticos* hasta cierto punto, lo cual significa que podemos cambiar sus dimensiones ligeramente al jalarlos, empujarlos, torcerlos, o comprimirlos. Para formarse una idea de los órdenes de magnitud implicados, consideremos una barra de acero

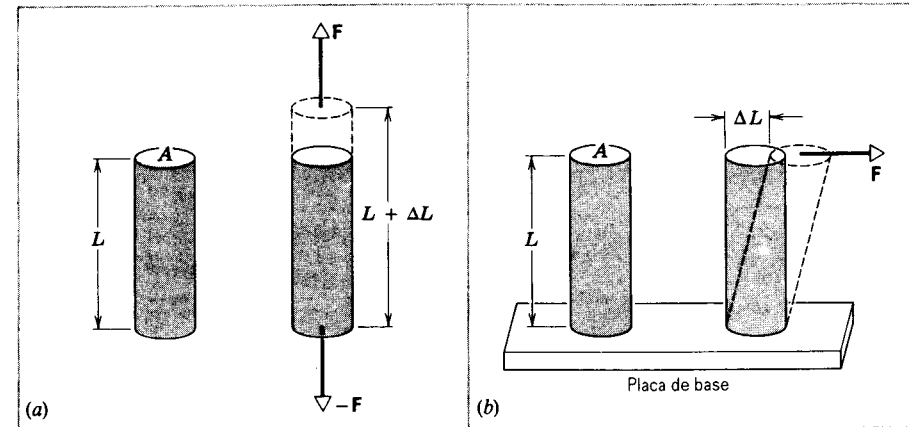


Figura 12 (a) Un cilindro, sometido a un esfuerzo de tracción, es estirado en una cantidad ΔL . (b) Un cilindro, sometido a un esfuerzo cortante, se deforma como un monte de naipes.

de 1 m de longitud y 1 cm de diámetro. Si colgamos un automóvil del extremo de la barra, ésta se estirará, pero sólo unos 0.5 mm, ó 0.05%. Más aún, la barra retornará a su longitud original cuando se haya descolgado el automóvil.

Si colgamos dos automóviles de la misma barra, ésta se estirará permanentemente y no recuperará su longitud original cuando hayamos retirado la carga. Por otra parte, si colgamos a tres automóviles de la barra, ésta se romperá. Justo antes de la rotura, la elongación de la barra será menor del 0.2%. Aunque deformaciones como ésta parecen pequeñas, en la práctica de la ingeniería son importantes.

La figura 12 muestra dos modos en que el sólido puede cambiar sus dimensiones cuando ciertas fuerzas actúan sobre él. En la figura 12a, un cilindro es estirado. En la figura 12b, el cilindro es deformado por las llamadas fuerzas cortantes, como podría deformarse un monte de naipes o un libro. (Un tercer modo es la compresión uniforme, la cual resulta de la aplicación de las fuerzas uniformemente en todas direcciones. En el capítulo 17 consideraremos la compresión uniforme). Los tres modos tienen en común que existe un *esfuerzo*, que se relaciona con las fuerzas aplicadas, y existe también una *deformación* de alguna clase.

El esfuerzo y la deformación adquieren formas diferentes en los casos de la figura 12 pero, en lo que respecta a la práctica diaria de la ingeniería, son proporcionales entre sí. La constante de proporcionalidad se llama *módulo de elasticidad*. Así pues,

$$\text{esfuerzo} = \text{módulo} \times \text{deformación} \quad (28)$$

La figura 13 muestra la relación entre el esfuerzo y la deformación para cilindros de prueba de acero tal como el de la figura 14. Para una parte sustancial de la gama de esfuerzos aplicados, la curva esfuerzo-deformación es lineal y tiene aplicación la ecuación 28, con un módulo constante (correspondiente a la porción lineal de la figura 13). Al continuar creciendo el esfuerzo, la relación

esfuerzo-deformación puede ser no lineal, pero el material permanece elástico: es decir, si se retira el esfuerzo, la muestra retorna a sus dimensiones originales.

Si el esfuerzo aumenta más allá del *límite de cedencia* o *límite elástico* del material, la muestra sufre un cambio permanente y no recupera sus dimensiones originales cuando se haya retirado el esfuerzo; esta clase de comportamiento se llama *plasticidad*. Más allá de la elasticidad o cedencia sucede, inevitablemente, la rotura, la cual se da tras un esfuerzo llamado *resistencia a la rotura* o *resistencia final*.

Tensión y compresión

Para un estiramiento o una compresión simples, el esfuerzo se define como F/A , la fuerza dividida por el área sobre la que actúa, y la deformación se define como la cantidad sin dimensiones $\Delta L/L$, la fracción de cambio de longitud de la muestra. Si la muestra es una barra larga, nótese que no sólo toda la barra sino también cualquier sección de

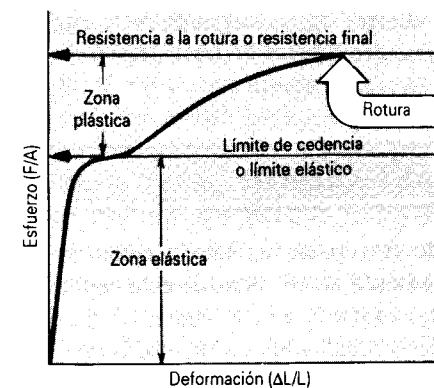


Figura 13 Curva de esfuerzo-deformación de una muestra de prueba de acero, tal como la de la figura 14. La muestra de prueba se deforma permanentemente cuando el esfuerzo es igual al *límite de cedencia* del material. Se romperá cuando el esfuerzo sea igual a la *resistencia a la rotura* del material.



Figura 14 Una muestra de prueba, usada para determinar la curva de esfuerzo-deformación como la de la figura 13.

ella experimenta la misma deformación cuando se le aplica un esfuerzo determinado. Puesto que el esfuerzo no tiene dimensiones, en la ecuación 28 el módulo tiene las mismas dimensiones que el esfuerzo, es decir, fuerza por unidad de área.

El módulo de los esfuerzos de tensión y de compresión se llama *módulo de Young*, y en la práctica de la ingeniería se representa mediante el símbolo E . La ecuación 28 se convierte en

$$\frac{F}{A} = E \frac{\Delta L}{L}$$

o bien

$$\Delta L = \frac{FL}{EA} \quad (29)$$

En una muestra a menudo puede medirse la deformación $\Delta L/L$ convenientemente por medio de un *medidor de deformación*; véase la figura 15. Estos aparatos sencillos y útiles, que pueden colocarse directamente en la máquina en operación con adhesivos, se basan en el principio de que la resistencia eléctrica de alambres hechos de ciertos materiales es una función de la deformación del alambre.

Aunque el módulo puede ser el mismo tanto para la compresión como para la tensión, la *resistencia a la rotura* puede ser distinta en ambos casos. Por ejemplo, el concreto es muy resistente a la compresión, pero tan débil a la tensión que casi nunca se usa de esta manera en la práctica de la ingeniería. La tabla 1 muestra los valores del módulo de Young y otras propiedades elásticas de algunos materiales de interés en ingeniería.

TABLA 1 ALGUNAS PROPIEDADES ELÁSTICAS DE MATERIALES SELECTOS DE INTERÉS EN INGENIERÍA

Material	Densidad (kg/m ³)	Módulo de Young (10 ⁹ N/m ²)	Límite de resistencia (10 ⁶ N/m ²)	Límite de cedencia (10 ⁶ N/m ²)
Acero [†]	7860	200	400	250
Aluminio	2710	70	110	95
Vidrio	2190	65	50 [‡]	—
Concreto [§]	2320	30	40 [‡]	—
Madera [†]	525	13	50 [‡]	—
Hueso	1900	9 [‡]	170 [‡]	—
Poliestireno	1050	3	48	—

[†] Acero estructural (ASTM-A 36).

[‡] En compresión.

[§] Alta resistencia.

[†] Pino.

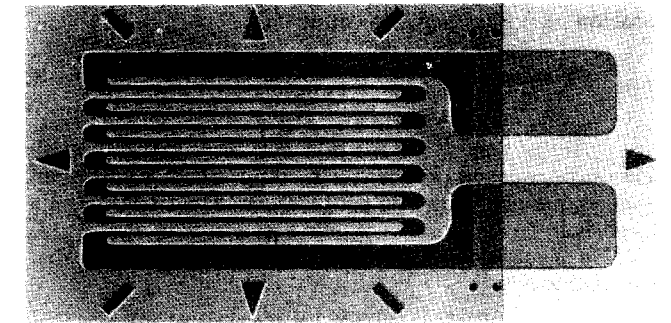


Figura 15 Medidor de deformación, cuyas dimensiones son 9.8 mm por 4.6 mm. El medidor se fija con un adhesivo al objeto cuya deformación va a medirse. La resistencia eléctrica del medidor varía con el esfuerzo, permitiendo medir deformaciones hasta de un 3%.

Esfuerzo cortante

En el caso del esfuerzo cortante, el esfuerzo es también una fuerza por unidad de área pero el vector de fuerza está en el plano del área en lugar de formar un ángulo recto con ella. Una vez más la deformación es una razón sin dimensiones $\Delta L/L$ estando las cantidades definidas como se muestra en la figura 12b. El módulo que se indica con el símbolo G en la práctica de la ingeniería, recibe el nombre de *módulo del esfuerzo cortante*. La ecuación 29 se aplica a los esfuerzos cortantes, siendo el módulo E reemplazado por el módulo G .

Los esfuerzos cortantes juegan un papel esencial en las flechas que giran bajo carga, en las fracturas de huesos provocados por torceduras, y en los resortes.

Problema muestra 6 Una barra de acero estructural tiene un radio R de 9.5 mm y una longitud L de 81 cm. Se le estira axialmente con una fuerza F de 6.2×10^4 N (unas 7 ton). (a) ¿Cuál es el esfuerzo en la barra? (b) ¿Cuál es el alargamiento de la barra bajo esta carga?

Solución (a) El esfuerzo se define de

$$\text{stress} = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi R^2} = \frac{6.2 \times 10^4 \text{ N}}{(\pi)(9.5 \times 10^{-3} \text{ m})^2} = 2.2 \times 10^8 \text{ N/m}^2.$$

El límite de cedencia del acero estructural es de $2.5 \times 10^8 \text{ N/m}^2$, de modo que esta barra está peligrosamente cerca de su límite de cedencia.

(b) De la ecuación 29, usando el resultado que hemos calculado, obtenemos

$$\Delta L = \frac{(F/A)L}{E} = \frac{(2.2 \times 10^8 \text{ N/m}^2)(0.81 \text{ m})}{2.0 \times 10^{11} \text{ N/m}^2} = 8.9 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.89 \text{ mm}.$$

Así, la deformación $\Delta L/L$ es $(8.9 \times 10^{-4} \text{ m})/(0.81 \text{ m})$, lo cual es 1.1×10^{-3} , o sea 0.11%.

Problema muestra 7 El fémur, que es el hueso primordial del muslo, tiene un diámetro mínimo de unos 2.8 cm en un hombre adulto, lo cual corresponde a una sección transversal A de $6 \times 10^{-4} \text{ m}^2$. ¿Con qué carga de compresión se rompería?

Solución De la tabla 1 vemos que la resistencia de la rotura S_u del hueso sujeto a compresión es de $170 \times 10^6 \text{ N/m}^2$. La fuerza de compresión es, entonces,

$$F = S_u A = (170 \times 10^6 \text{ N/m}^2)(6 \times 10^{-4} \text{ m}^2) = 1.0 \times 10^5 \text{ N}.$$

Lo que significa 23,000 lb, unas 11 ton. Aunque se trata de fuerza grande, ésta puede presentarse durante, por ejemplo, un mal aterrizaje en paracaídas sobre terreno firme. La fuerza no necesita ser prolongada; unos cuantos milisegundos bastarían.

Ahora estamos preparados para comprender cómo nos pueden ayudar las propiedades elásticas de los materiales a determinar sus condiciones de equilibrio, como lo sugiere el siguiente problema muestra.

Problema muestra 8 Una mesa de cuatro patas tiene tres de ellas de longitud $D = 1.00 \text{ m}$; la cuarta es más larga por una pequeña distancia $d = 0.50 \text{ mm}$, de modo que la mesa se bambolea ligeramente. Sobre la mesa se coloca verticalmente un pesado cilindro de acero, cuya masa M es de 290 kg, de modo

que las cuatro patas se comprimen y la mesa ya no se tambalea. Cada pata es un cilindro de madera cuya área de sección transversal A es 1.0 cm^2 . El módulo de Young E para la madera es de $1.3 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$. Supóngase que el tablero de la mesa permanece a nivel y que las patas no se pandean. ¿Con qué fuerza empujará el suelo contra cada pata?

Solución Consideremos al tablero de la mesa como nuestro sistema. Si el tablero permanece a nivel, cada una de las tres patas cortas debe comprimirse en la misma cantidad ΔL_3 , con la misma fuerza F_3 . La única pata larga debe comprimirse en una cantidad mayor ΔL_1 , por una fuerza F_1 , y debemos tener

$$\Delta L_3 + d = \Delta L_1.$$

De la ecuación 29 ($\Delta L = FL/EA$), podemos escribir esta relación así:

$$F_3 D + dAE = F_1(D + d) \approx F_1 D, \quad (30)$$

donde despreciamos a d en comparación con D en el último término. De la ecuación 6 para el equilibrio de las fuerzas en la dirección vertical, tenemos

$$\sum F_y = 3F_3 + F_1 - Mg = 0. \quad (31)$$

Si resolvemos las ecuaciones 30 y 31 para las fuerzas desconocidas, hallamos

$$\begin{aligned} F_3 &= \frac{Mg}{4} - \frac{dAE}{4D} \\ &= \frac{(290 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)}{4} - \frac{(5.0 \times 10^{-4} \text{ m})(10^{-4} \text{ m}^2)(1.3 \times 10^{10} \text{ N/m}^2)}{(4)(1.00 \text{ m})} \\ &= 711 \text{ N} - 163 \text{ N} = 548 \text{ N}. \end{aligned}$$

De igual manera,

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{Mg}{4} + \frac{3dAE}{4D} \\ &= 711 \text{ N} + 489 \text{ N} = 1200 \text{ N}. \end{aligned}$$

Usted puede demostrar que, para llegar a su configuración de equilibrio, las tres patas cortas se comprimieron en 0.42 mm cada una, y la única pata larga en 0.92 mm, siendo la diferencia 0.50 mm, como se esperaba.

El cilindro debe colocarse situado más cerca de la pata larga que de cualquiera de las tres patas más cortas si el tablero ha de permanecer horizontal. Puede usarse la condición de equilibrio de las torcas para hallar su posición, si conocemos las dimensiones del tablero y la colocación de sus patas.

embargo, las partículas que conforman la rueda experimentan una aceleración centrípeta $\mathbf{a}$ dirigida hacia el eje. Puesto que $\mathbf{a} \neq 0$, ¿cómo podemos decir que la rueda está en equilibrio?

- Dé varios ejemplos de un objeto que no esté en equilibrio aun cuando la resultante de todas las fuerzas que actúen sobre él sea cero.
- ¿Coinciden el centro de masa y el centro de gravedad en un edificio? ¿Y en un lago? ¿Bajo qué condiciones resulta insignificante la diferencia entre el centro de masa y el centro de gravedad? Dé un ejemplo.
- Si un cuerpo rígido es arrojado al aire sin darle un giro, no girará durante su vuelo, siempre que la resistencia del aire pueda despreciarse. ¿Qué implica este simple resultado respecto a la ubicación del centro de gravedad?
- La gimnasta olímpica Mary Lou Retton realizó algunos ejercicios admirables en las barras paralelas asimétricas. Un amigo le dice a usted que un análisis cuidadoso de las películas de sus proezas demuestra que, no importa lo que haga, su centro de masa está arriba de su(s) punto(s) de apoyo en todo momento, como lo exigen las leyes de la física. Comente la afirmación de su amigo.
- ¿Qué es más probable que se rompa con el uso: una hamaca fuertemente estirada entre dos árboles o una que se combe un poco? Explique su respuesta.
- Una escalera de mano está en reposo con su extremo superior contra una pared y su extremo inferior sobre el suelo. ¿Es más probable que se resbale cuando alguien está parado sobre ella en la parte más baja o en la parte más alta? Explique.
- Un libro reposa sobre una mesa. La mesa lo empuja hacia arriba con una fuerza precisamente igual al peso del libro. En términos poco formales, ¿cómo “sabe” la mesa qué fuerza hacia arriba debe proporcionar? ¿Cuál es el mecanismo por el cual entra en juego esta fuerza? (Véase “The Smart Table”, por Earl Zwicker, *The Physics Teacher*, diciembre de 1981, pág. 633.)
- Póngase de pie frente al borde de una puerta abierta, con un pie a cada lado de ella. Hallará que no le es posible estar parado sobre las puntas de los pies. ¿Por qué?
- Siéntese en una silla de respaldo recto y trate de ponerse de pie sin inclinarse hacia el frente. ¿Por qué no puede hacerlo?
- Una barra larga le ayuda a un equilibrista a mantener el equilibrio. ¿Cómo?
- Un bloque compuesto hecho de madera y metal descansa sobre una mesa. ¿En qué orientación de las dos mostradas en la figura 16 puede usted volcarlo con la menor fuerza?
- En el problema muestra 5, ¿por qué no es necesario considerar la fricción en el gozne?
- Un cuadro está colgado de una pared por dos alambres. ¿Qué orientación deben tener los alambres para soportar una tensión mínima? Explique cómo es posible el equilibrio con cualquier número de orientaciones y tensiones, aun cuando el cuadro tenga una masa definida.

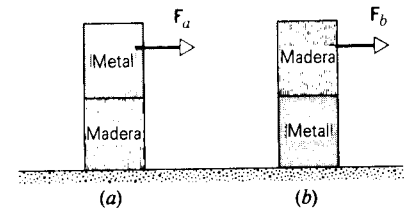


Figura 16 Pregunta 15.

- Demuestre cómo usar una báscula de resorte para pesar objetos bastante más allá de la lectura máxima de la báscula.
- Explique, usando fuerzas y torcas, cómo un árbol puede mantener el equilibrio en un vendaval.
- Un virus en un tubo lleno de líquido de una centrífuga que está en movimiento circular uniforme (es decir, en movimiento *acelerado*) como lo ve un observador en el laboratorio. Sin embargo, un observador que girara con la centrífuga declararía que el virus no está *acelerado*. Explique cómo puede estar el virus en equilibrio para este segundo observador pero no para el primero.
- Un bloque uniforme, en forma de paralelepípedo rectangular de lados en la razón 1:2:3, se halla sobre una superficie horizontal. ¿En qué posición, en caso de que haya alguna, es decir, sobre cuál de sus tres caras, puede decirse que es más estable?
- ¿Existe algún cuerpo que sea realmente rígido? Si existe, dé un ejemplo. Si no, explique por qué.
- Usted está sentado en el asiento del conductor de un automóvil estacionado. Se le dice que las fuerzas ejercidas hacia arriba por el suelo sobre cada una de las cuatro llantas son diferentes. Exponga los factores que deben considerarse para formar esta afirmación como cierta o no.
- En el problema muestra 3, si la pared no estuviese carente de fricción, ¿nos proporcionarían las leyes empíricas de la fricción una condición extra necesaria para determinar la fuerza (vertical) extra ejercida por la pared sobre la escalera?
- Cuando el cilindro de prueba de la figura 14 se estira bajo el esfuerzo aplicado se hace más larga. ¿Qué cambio, si lo hay, esperaría usted en el diámetro del cilindro?
- ¿Es el módulo de Young para el hule mayor o menor que el módulo de Young para el acero? Según este criterio, ¿es más elástico el hule que el acero?
- Una viga horizontal apoyada en ambos extremos está cargada en el centro. Demuestre que la parte superior de la viga está bajo compresión mientras que la parte inferior está bajo tensión.
- ¿Por qué se usan varillas de refuerzo en las estructuras de concreto? (Compare la resistencia a la tensión del concreto con su resistencia a la compresión.)

PREGUNTAS

- ¿Son ambas ecuaciones 1 y 3 condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio mecánico? ¿Para el equilibrio estático?
- ¿Está en equilibrio una bola de béisbol en el instante en que llega al reposo en la cima de un disparo vertical?
- En un péndulo simple, ¿está el disco en equilibrio en cualquier punto de su balanceo? Si es así, ¿dónde?
- Una rueda que gira a una velocidad angular constante ω respecto a un eje fijo está en equilibrio mecánico porque no actúa sobre ella una fuerza externa neta o una torca. Sin

PROBLEMAS

Sección 14-1 Condiciones de equilibrio

1. Una familia de ocho miembros, cuyos pesos en libras se indican en la figura 17, se halla en equilibrio en un balancín de sube y baja. ¿Cuál es el número que corresponde a la persona que produce la torca más grande, respecto al punto de pivoteo, dirigido (a) hacia afuera de la página y (b) hacia adentro de la página?

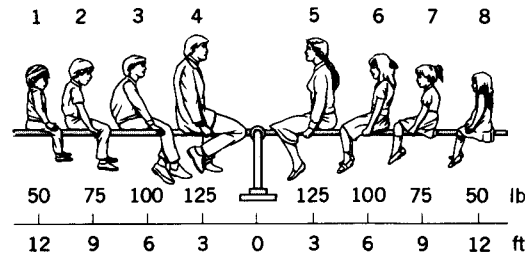


Figura 17 Problema 1.

2. Tres fuerzas actúan sobre un objeto cuadrado rígido de peso despreciable jalando en sus esquinas como se muestra, a escala, en la figura 18. (a) ¿Se satisface la primera condición del equilibrio? (b) ¿Se satisface la segunda condición del equilibrio? (c) Si alguna de las respuestas precedentes es negativa, ¿podría una cuarta fuerza restituir el equilibrio del objeto? Si es así, especifique la magnitud, dirección, y punto de aplicación de la fuerza necesaria.

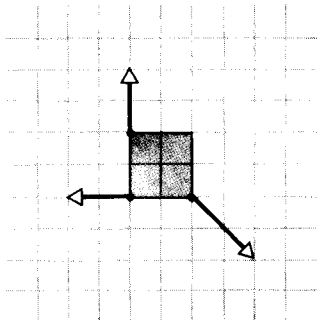


Figura 18 Problema 2.

3. Demuestre que cuando actúan solamente tres fuerzas sobre un objeto en equilibrio, deben ser coplanares y sus líneas de acción deben encontrarse en un punto o ser paralelas.

Sección 14-3 Ejemplos de equilibrio

4. Se sabe que cierta nuez requiere, para romperse, fuerzas de 46 N ejercidas sobre ella en ambos lados. ¿Qué fuerzas F se requerirán cuando esté colocada en el cascanueces mostrado en la figura 19?

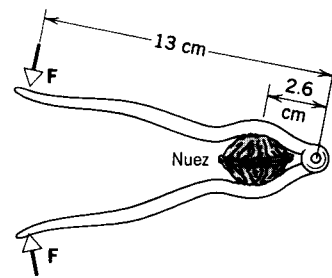


Figura 19 Problema 4.

5. La torre inclinada de Pisa (véase la figura 20) tiene 55 m de altura y 7.0 m de diámetro. La parte superior de la torre se desplaza 4.5 m de la vertical. Considerando a la torre como un cilindro uniforme, circular, (a) ¿qué desplazamiento adicional, medido en la parte superior, llevará a la torre a un vuelco inminente? (b) ¿Qué ángulo con la vertical formará la torre en ese momento? (La razón de movimiento actual de la parte superior es de 1 mm/año.)



Figura 20 Problema 5.

6. Un cubo descansa en reposo sobre una mesa horizontal cuando se le aplica una pequeña fuerza horizontal perpendicular y en el centro de una arista de la parte superior. La fuerza aumenta ahora uniformemente. ¿Qué le ocurrirá al cubo primero, se deslizará o se volcará? El coeficiente de fricción estática entre las superficies es igual a 0.46.
7. Un guacal en forma de cubo de 1.12 m contiene una pieza de maquinaria cuyo diseño es tal que el centro de gravedad del guacal y de su contenido está situado a 0.28 m sobre su centro geométrico. El guacal descansa sobre una rampa que forma un ángulo θ con la horizontal. Al aumentar θ desde cero, se llegará a un ángulo en el cual el guacal o bien comenzará a deslizarse hacia abajo o bien se volcará.

Cuál de estos fenómenos sucederá si el coeficiente de fricción estática es (a) 0.60? (b) 0.70? En cada caso dé el ángulo en el cual ocurre el fenómeno.

8. Una cadena flexible de peso W cuelga entre dos puntos fijos, A y B, situados en el mismo nivel, como lo muestra la figura 21. Halle (a) la fuerza ejercida por la cadena sobre cada punto extremo y (b) la tensión en la cadena en el punto más bajo.



Figura 21 Problema 8.

9. En la figura 22 un hombre trata de sacar a su automóvil del lodo en el borde de una carretera. Ata fuertemente un extremo de una cuerda alrededor de la defensa delantera y el otro extremo alrededor de un poste de teléfonos que está a una distancia de 62 ft de la defensa. Luego empuja de lado a la cuerda en su punto medio con una fuerza $F = 120$ lb, desplazando el centro de la cuerda 1.5 ft de su posición previa, y el automóvil comienza a moverse. Halle la fuerza ejercida por la cuerda sobre el automóvil. (La cuerda se estira un tanto bajo la tensión.)

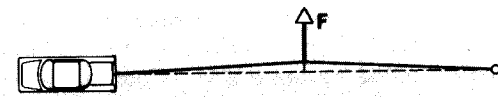


Figura 22 Problema 9.

10. Una esfera uniforme de peso w y radio r está sostenida mediante una cuerda amarrada a una pared sin fricción a una distancia L medida desde el centro de la esfera, como se ilustra en la figura 23. Halle (a) la tensión en la cuerda y (b) la fuerza ejercida sobre la esfera por la pared.
11. Un automóvil estacionado de 1360 kg de masa tiene una base de ruedas (distancia entre el eje delantero y el trasero) de 305 cm. Su centro de gravedad está ubicado a 178 cm detrás del eje delantero. Determine (a) la fuerza hacia arriba ejercida por el suelo contra una de las dos ruedas delanteras (se suponen iguales) y (b) la fuerza hacia arriba que el suelo ejerce contra cada una de las dos ruedas traseras (se suponen iguales).
12. Una persona de 160 lb de peso camina por un puente nivelado y se detiene a más de tres cuartas partes de la distancia desde un extremo del puente. Éste es uniforme y pesa 600 lb. ¿Cuáles son los valores de las fuerzas verticales que los soportes ejercen sobre cada extremo del puente por sus apoyos?
13. Una clavadista de 582 N de peso está de pie sobre el extremo de un trampolín uniforme de 4.48 m de longitud,

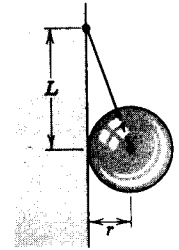


Figura 23 Problema 10.

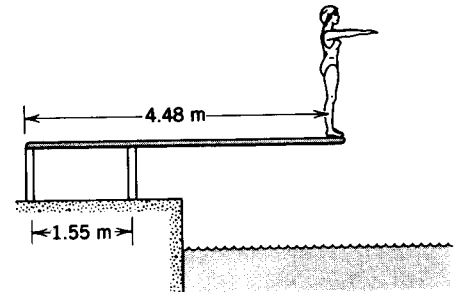


Figura 24 Problema 13.

sujeto por dos pedestales entre los cuales hay una separación de 1.55 m, como se ilustra en la figura 24. Halle la tensión (o compresión) en cada uno de los dos pedestales.

14. Una barra de un metro se balancea sobre el borde de un cuchillo en la marca de 50.0 cm. Cuando se colocan dos monedas sobre la marca de 12.0 cm, se encuentra que la barra cargada se equilibra en la marca de 45.5 cm. Cada moneda tiene una masa de 5.00 g. Halle la masa de la barra.
15. Una viga es transportada por tres obreros, uno en un extremo y los otros dos soportando la viga entre ellos sobre un travesaño situado de modo tal que la carga se reparte igualmente entre los tres. Halle dónde está colocado el travesaño. Desprecie la masa del travesaño.
16. Un limpiador de ventanas de 74.6 kg usa una escalera de mano de 10.3 kg que tiene 5.12 m de largo. Sitúa un extremo a 2.45 m de una pared y descansa la parte superior contra una ventana cuyos vidrios están quebrados y sube por la escalera. Cuando llega a 3.10 m se rompe la ventana. Despreciando la fricción entre la escalera y la ventana y suponiendo que la base de la escalera no se desliza, halle (a) la fuerza ejercida sobre la ventana por la escalera justo antes de que se rompa la ventana y (b) la magnitud y dirección de la fuerza ejercida sobre la escalera por el suelo justo antes de que se rompa la ventana.
17. La figura 25 muestra las estructuras anatómicas de la pierna y el pie que intervienen cuando se levanta del suelo el talón de modo que el pie haga en efecto contacto con el suelo en un solo punto, mostrado como P en la figura. Calcule las fuerzas que deben ejercerse sobre el pie por el músculo de la pantorrilla y por los huesos de la pierna cuando una persona de 65 kg se para de puntillas sobre un pie. Compare estas fuerzas con el peso de la persona. Suponga que $a = 5.0$ cm y $b = 15$ cm.